

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DIEGO FERNANDO MORO

**DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS PARA REDUZIR OS ERROS DE  
ITERAÇÃO E DISCRETIZAÇÃO EM CFD**

Curitiba - PR

2018

Diego Fernando Moro

DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS PARA REDUZIR OS ERROS DE  
ITERAÇÃO E DISCRETIZAÇÃO EM CFD

Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor em Engenharia  
Mecânica no Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia da  
Universidade Federal do Paraná, na área de con-  
centração Fenômenos de Transporte e Mecânica  
dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi

Curitiba - PR

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR  
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

---

M867d

Moro, Diego Fernando

Desenvolvimento de técnicas para reduzir os erros de iteração e discretização em CFD / Diego Fernando Moro. – Curitiba, 2018.  
164 p. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2018.

Orientador: Carlos Henrique Marchi.

1. Erro de iteração. 2. Erro de discretização. 3. Estimativa inicial. 4. Dinâmica dos fluidos computacional. I. Universidade Federal do Paraná. II. Marchi, Carlos Henrique. III. Título.

CDD: 004.22

---

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA  
MECÂNICA

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **DIEGO FERNANDO MORO** intitulada: **DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS PARA REDUZIR OS ERROS DE ITERAÇÃO E DISCRETIZAÇÃO EM CFD**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 04 de Abril de 2018.

CARLOS HENRIQUE MARCHI  
Presidente da Banca Examinadora

LUIS MAURO MOURA  
Avaliador Externo

LUCIANO KIYOSHI ARAKI  
Avaliador Interno

ADMILSON TEIXEIRA FRANCO  
Avaliador Externo

GEOVANI NUNES GRAPIGLIA  
Avaliador Externo

# AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao programa UNIESPAÇO da AEB (Agência Espacial Brasileira), o CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Ao seu professor orientador, Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi pela paciência, todo o conhecimento recebido e a confiança no potencial do orientando desde o início da atividades no grupo de pesquisa.

Agradece também aos membros da banca examinadora pelo tempo dedicado à leitura deste trabalho e às sugestões recebidas.

Aos autores de códigos computacionais utilizados como base nas simulações deste trabalho: Cosmo Damião Santiago e Nicholas Dicati Pereira da Silva.

Aos professores e colegas do LENA (Laboratório de Experimentação Numérica), pela amizade, vontade de ajudar e discussões que ajudaram no decorrer deste trabalho.

Aos familiares pelo apoio em todas as horas, à sua mãe e seu pai pela dedicação e à sua esposa pela companhia e carinho.

*"Nós somos uma maneira do Cosmos conhecer a si mesmo. "*  
*Carl Sagan*

# RESUMO

Este trabalho tem por objetivo reduzir erros de iteração e erros de discretização de soluções numéricas em problemas de Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC, ou CFD do inglês *Computational Fluid Dynamics*). O erro de discretização foi estimado e reduzido utilizando-se a Extrapolação de Richardson (ER) para variáveis globais e pontuais entre duas malhas distintas e o processo foi repetido de forma sucessiva gerando vários níveis de extrapolação, técnica esta chamada Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER). O erro de discretização de todo o campo foi reduzido utilizando a técnica de Extrapolação de Richardson Completa (ERC ou CRE do inglês *Complete Richardson Extrapolation*); neste trabalho CRE também foi adaptado para redução de erro do iteração ao obter uma estimativa inicial acurada para início do processo iterativo. Alguns problemas modelo de interesse da área de CFD foram utilizados para analisar a redução dos referidos erros: equações de Laplace 2D e 3D, Advecção-Difusão 2D, Burgers 2D, Navier-Stokes 2D e Poisson 3D, estes problemas modelam escoamento de fluidos incompressíveis e transferência de calor. A discretização destas equações foi obtida com o método das diferenças finitas (MDF) e o método de volumes finitos (MVF). O método CRE necessita conjuntos de soluções numéricas obtidas em diferentes malhas, neste trabalho estes conjuntos foram obtidos com razão de refino 2 (relação entre o número de nós ou volumes de malhas sucessivas). Com o MDF a posição de apenas alguns nós coincide entre malhas, nos demais utilizou-se neste trabalho interpolação de até 15º grau. Com o MVF nenhum ponto coincide, interpolou-se todos os pontos até o 15º grau. Foram analisadas até 4 solvers, de 2 a 3 variáveis secundárias para cada problema-modelo, 2 soluções fabricadas no modelo Advecção-Difusão 2D, 13 formas de estimativa inicial e a média da norma  $L_1$  do erro de discretização para comparação de CRE. Os resultados indicam que existem nos problemas Advecção-Difusão 2D, Burgers 2D e Navier-Stokes 2D limites de acurácia os quais CRE com modificação não se mostra capaz de reduzir, fato também analisado por variáveis globais com MER. A máxima ordem de acurácia em todo o campo obtida com MDF: 14, 6, 6/8, 8/6, 14 e 8 e com MVF 14, 4, 4/6, 6/6, 14 e 12 nos problemas Laplace 2D, Advecção-Difusão 2D, Burgers 2D U/V, Navier-Stokes 2D  $\psi/\omega$ , Laplace 3D e Poisson 3D, respectivamente. Obteve-se até 12 ordens de acurácia na redução dos erros de iteração, embora surjam os mesmos limites de ordem verdadeiras como supracitado. Em problemas sem multigrid há uma redução no tempo de CPU de até três ordens de grandeza utilizando os métodos de estimativa inicial propostos neste trabalho.

**Palavras-chave:** Erro de Iteração. Erro de Discretização. Estimativa inicial. CFD. CHT.

# ABSTRACT

The goal of this work is to reduce iteration and discretization errors of numerical solution in CFD (Computational Fluid Dynamics). The discretization error was estimated and reduced using the Richardson Extrapolation (RE) for global and point variables between two distinct grids, and this process was repeated generating several extrapolation levels, the technique is called Repeated Richardson Extrapolation (RRE). The discretization error of the entire field of solutions was reduced using the Complete Richardson Extrapolation (CRE), in this work CRE was adapted to reduce iteration error through an accurate initial guess to start the iterative process. Some model problems of interest in CFD were used to analyse the reduction of the cited errors: 2D and 3D Laplace equation, 2D Advection-Diffusion, 2D Burgers, 2D Navier-Stokes and 3D Poisson, these problems can simulate incompressible flow of a fluid and heat transfer. The discretization of these equations was obtained through Finite Differences Method (FDM) and Finite Volumes Method (FVM). In order to use CRE, it is necessary a set of numerical solutions in different grids, in this work these solutions were obtained with refinement ratio of 2 (relation of successive number of nodes or volumes in a grid). In the FDM the position of only few nodes were coincident between grids, in this work an interpolation of up to 15<sup>th</sup> degree was used in the rest of them. In FVM none node was coincident, so they were all interpolated with up to 15<sup>th</sup> degree. The following were analysed: up to four solvers, two to three secondary variables for each model equation, two produced solutions in 2D Advection-Diffusion equation, thirteen different initial guesses and the average  $L_1$  norm of discretization error in CRE. The results show that there is an accuracy limit which CRE doesn't seem capable of reduce in the following model equations: 2D Advection-Diffusion, 2D Burgers and 2D Navier-Stokes, this was also analysed in global variables with RRE. The maximum order of accuracy obtained with FDM: 14, 6, 6/8, 8/6, 14 and 8; with FVM: 14, 4, 4/6, 6/6, 14 and 12 in the model equations 2D Laplace, 2D Advection-Diffusion, 2D Burgers U/V, 2D Navier-Stokes  $\psi/\omega$ , 3D Laplace and 3D Poisson respectively. Up to 12<sup>th</sup> order of accuracy was obtained in the iteration errors reduction, although there were the same accuracy limits quoted above. In problems without multigrid, there is a CPU time reduction up to three orders of magnitude using the initial guess methods introduced in this work.

**Keywords:** Iteration error. Discretization error. Initial guess. CFD. CHT.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Comportamento do erro de discretização em três casos distintos variando o tamanho de malha utilizado ( $h$ )(MORO; MARCHI, 2016). . . . .	27
Figura 2.1 – Exemplo de malha 1D de diferenças finitas 5 e 9 nós. . . . .	42
Figura 2.2 – Exemplo de malha 2D de diferenças finitas com $5^2$ nós. . . . .	45
Figura 2.3 – Exemplo de malha 2D de volumes finitos com $4 \times 4$ volumes de controle reais. . . . .	46
Figura 3.1 – Malha 2D genérica de diferenças finitas com espaçamento $h$ . . . . .	50
Figura 3.2 – Malha 2D genérica de volumes finitos com espaçamento $h$ . . . . .	51
Figura 3.3 – Malha 3D genérica de diferenças finitas. . . . .	61
Figura 3.4 – Duas malhas de diferenças finitas sobrepostas: em preto estão mostrados os nós da malha grossa $3^2$ , em cinza os nós da malha fina $5^2$ . . . . .	64
Figura 3.5 – Duas malhas de volumes finitos sobrepostas, em preto estão mostrados os nós da malha grossa $2 \times 2$ , em cinza os nós da malha fina $4 \times 4$ , o meio das faces interpoladas está em preto . . . . .	65
Figura 4.1 – Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para diferentes solvers na estimativa inicial nula - Laplace 2D DF. . . . .	83
Figura 4.2 – Comparação de $Li_0$ (esquerda) e suas ordens de acurácia (direita) em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Laplace 2D DF. . . . .	83
Figura 4.3 – Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ (esquerda) e $\phi_{an}$ (direita) - Laplace 2D DF. . . . .	85
Figura 4.4 – Ordem efetiva de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ (esquerda) e $\phi_{an}$ (direita) - Laplace 2D DF. . . . .	85
Figura 4.5 – Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para o solver MSI com as diferentes estimativas iniciais - Laplace 2D DF. . . . .	86
Figura 4.6 – Erro de discretização da variável $T_c$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D DF. . . . .	87
Figura 4.7 – $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D DF. . . . .	88
Figura 4.8 – Comparação de $Li_0$ (esquerda) e sua ordem efetiva (direita) em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Laplace 2D VF. . . . .	89
Figura 4.9 – Erro de discretização da variável $T_c$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D VF. . . . .	90
Figura 4.10 – $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D VF. . . . .	91

Figura 4.11—Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para diferentes solvers na estimativa inicial nula - Advecção-Difusão 2D DF. . . . .	92
Figura 4.12—Comparação de $Li_0$ e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão 2D DF. . . . .	92
Figura 4.13—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ e $\phi_{an}$ - Advecção-Difusão 2D DF. . . . .	93
Figura 4.14—Ordem efetiva de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ (esquerda) e $\phi_{an}$ (direita) - Advecção-Difusão 2D DF. . . . .	93
Figura 4.15—Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para o solver MSI com as diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão 2D DF. . . .	94
Figura 4.16—Erro de discretização da variável $T_c$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D DF. .	95
Figura 4.17—Erro de discretização da variável $T_m$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D DF. .	95
Figura 4.18— $L_\phi$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D DF. . . . .	96
Figura 4.19—Comparação de $Li_0$ e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão 2D VF. . . . .	97
Figura 4.20—Erro de discretização da variável $T_c$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D VF. .	98
Figura 4.21—Erro de discretização da variável $T_m$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D VF. .	98
Figura 4.22— $L_\phi$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D VF. . . . .	99
Figura 4.23—Erro de discretização da variável $T_c$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D DF. . . . .	100
Figura 4.24—Erro de discretização da variável $T_m$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D DF. . . . .	100
Figura 4.25— $L_\phi$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D DF. . . . .	101
Figura 4.26—Erro de discretização da variável $T_c$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D VF. . . . .	102

Figura 4.27—Erro de discretização da variável $T_m$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D VF . . . . .	102
Figura 4.28— $L_\phi$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D Modificado VF . . . . .	103
Figura 4.29—Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para o solver MSI com as diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D DF . . . . .	104
Figura 4.30—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $\bar{m}$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF. . . . .	105
Figura 4.31— $L_\phi$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF U. . . . .	106
Figura 4.32— $L_\phi$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF V. . . . .	106
Figura 4.33—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $\bar{m}$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers VF 2D. . . . .	107
Figura 4.34— $L_\phi$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D VF U. . . . .	108
Figura 4.35— $L_\phi$ e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D VF V. . . . .	108
Figura 4.36—Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para o solver MSI com as diferentes estimativas iniciais - Navier-Stokes 2D DF . . . . .	109
Figura 4.37—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $v_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF. . . . .	110
Figura 4.38— $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF $\psi$ . . . . .	111
Figura 4.39— $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF $\omega$ . . . . .	111
Figura 4.40—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $v_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF. . . . .	113
Figura 4.41— $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF $\psi$ . . . . .	113
Figura 4.42— $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF $\omega$ . . . . .	114
Figura 4.43—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $T_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D DF. . . . .	115
Figura 4.44— $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D DF. . . . .	115

Figura 4.45—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $T_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D VF.	117
Figura 4.46— $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D VF. . . . .	117
Figura 4.47—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $T_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D DF.	118
Figura 4.48— $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D DF. . . . .	119
Figura 4.49—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $T_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D VF.	120
Figura 4.50— $L_\phi$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D VF. . . . .	121
Figura A.1—Erro de discretização da variável $T_m$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D DF.	133
Figura A.2—Erro de discretização da variável $Q_e$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D DF.	134
Figura A.3—Erro de discretização da variável $T_m$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D VF.	134
Figura A.4—Erro de discretização da variável $Q_e$ e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D VF.	135
Figura A.5—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $u_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF.	135
Figura A.6—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $v_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF.	136
Figura A.7—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $u_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D VF.	136
Figura A.8—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $v_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D VF.	137
Figura A.9—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $u_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF. . . . .	137
Figura A.10—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $\dot{m}$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF. . . . .	138
Figura A.11—Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $u_c$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF. . . . .	138

Figura A.12–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $\hat{m}$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF. . . . .	139
Figura A.13–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $T_m$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D DF. . . . .	139
Figura A.14–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $Q_e$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D DF. . . . .	140
Figura A.15–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $T_m$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D VF. . . . .	140
Figura A.16–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $Q_e$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D VF. . . . .	141
Figura A.17–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $T_m$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D DF. . . . .	141
Figura A.18–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $Q_e$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D DF. . . . .	142
Figura A.19–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $T_m$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D VF. . . . .	142
Figura A.20–Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável $Q_e$ em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D VF. . . . .	143
Figura B.1 – Comparação de $Li_0$ e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão Modificado 2D DF. . . . .	144
Figura B.2 – Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ e $\phi_{an}$ - Advecção-Difusão Modificado 2D DF. . . . .	145
Figura B.3 – Ordem efetiva de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ (esquerda) e $\phi_{an}$ (direita) - Advecção-Difusão Modificado 2D DF. . . . .	145
Figura B.4 – Comparação de $Li_0$ e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão Modificado 2D VF. . . . .	146
Figura B.5 – Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D DF. . . . .	147
Figura B.6 – Ordem efetiva de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D DF. . . . .	147
Figura B.7 – Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização no método $\phi_h$ - Burgers 2D DF. . . . .	148
Figura B.8 – Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização no método $\phi_{an}$ - Burgers 2D DF. . . . .	148

Figura B.9—Ordem efetiva de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ (esquerda) e $\phi_{an}$ (direita) - Burgers 2D DF. . . . .	149
Figura B.10—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização no método $\phi_{an}$ - Burgers 2D DF. . . .	149
Figura B.11—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D VF. . . . .	150
Figura B.12—Ordem efetiva de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D VF. . . . .	150
Figura B.13—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Navier Stokes 2D. . . . .	151
Figura B.14—Ordem efetiva de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Navier Stokes 2D. . . . .	151
Figura B.15—Ordem efetiva de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ (esquerda) - Navier Stokes 2D DF. . . . .	152
Figura B.16—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização no método $\phi_{an}$ - Navier Stokes 2D DF. . . .	152
Figura B.17—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Navier-Stokes 2D VF. . . . .	153
Figura B.18—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Navier-Stokes 2D VF. . . . .	153
Figura B.19—Comparação de $Li_0$ e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Laplace 3D DF. . . . .	154
Figura B.20—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ e $\phi_{an}$ - Laplace 3D DF. . . .	154
Figura B.21—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ e $\phi_{an}$ - Laplace 3D DF. . . .	155
Figura B.22—Comparação de $Li_0$ e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Laplace 3D VF. . . . .	155
Figura B.23—Comparação de $Li_0$ e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Poisson 3D DF. . . . .	156
Figura B.24—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ e $\phi_{an}$ - Poisson 3D DF. . . .	156
Figura B.25—Comparação de $Li_0$ em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos $\phi_h$ e $\phi_{an}$ - Poisson 3D DF. . . .	157
Figura B.26—Comparação de $Li_0$ e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Poisson 3D VF. . . . .	157
Figura C.1—Forma da matriz dos coeficientes de um sistema de equações pentadiagonal esparsa. . . .	158

# LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Exemplo de níveis de soluções obtidas aplicando-se MER. . . . .	41
Tabela 3.1 – Valores de $\Phi$ para obter o sistema de equações da Eq. de Burgers 2D . . . . .	54
Tabela 3.2 – Valores de $\Phi$ para obter o sistema de equações da Eq. de Navier-Stokes 2D . . . .	57
Tabela 4.1 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Laplace 2D DF. . . . .	82
Tabela 4.2 – Coeficientes da Eq. (2.21) - Laplace 2D DF. . . . .	86
Tabela 4.3 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Laplace 2D VF. . . . .	89
Tabela 4.4 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Advecção-Difusão 2D DF. . . . .	91
Tabela 4.5 – Coeficientes da Eq. (2.21) - Advecção-Difusão 2D DF. . . . .	94
Tabela 4.6 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Advecção-Difusão 2D VF. . . . .	96
Tabela 4.7 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Advecção-Difusão Modificado 2D DF. . . . .	99
Tabela 4.8 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Advecção-Difusão Modificado 2D VF. . . . .	101
Tabela 4.9 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Burgers 2D DF . . . . .	104
Tabela 4.10–Coeficientes da Eq. (2.21) - Burgers 2D DF. . . . .	105
Tabela 4.11–Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Burgers 2D VF. . . . .	107
Tabela 4.12–Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Navier-Stokes 2D DF. . . . .	109
Tabela 4.13–Coeficientes da Eq. (2.21) - Navier-Stokes 2D DF. . . . .	110
Tabela 4.14–Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Navier-Stokes 2D VF. . . . .	112
Tabela 4.15–Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Laplace 3D DF. . . . .	114
Tabela 4.16–Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Laplace 3D VF. . . . .	116
Tabela 4.17–Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Poisson 3D DF. . . . .	118
Tabela 4.18–Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Poisson 3D VF. . . . .	120

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>ADI</i>	<i>Alternating Direction Implicit</i>
<i>CDS – 2</i>	Esquema de diferenças centrais de segunda ordem de acurácia ( <i>Central Differencing Scheme</i> )
<i>CDS – 4</i>	Esquema de diferenças centrais de quarta ordem de acurácia ( <i>Central Differencing Scheme</i> )
<i>CFD</i>	Computational Fluid Dynamics
<i>CRE</i>	Extrapolação de Richardson Completa ( <i>Complete Richardson Extrapolation</i> )
<i>CS</i>	Correction Scheme
<i>DFC</i>	Dinâmica dos Fluidos Computacional
<i>ER</i>	Extrapolação de Richardson
<i>ERC</i>	Extrapolação de Richardson Completa
<i>ERT</i>	Extrapolação de Richardson Total
<i>FDM</i>	<i>Finite Differences Method</i>
<i>FVM</i>	<i>Finite Volume Method</i>
<i>FMG</i>	<i>Full Multigrid</i>
<i>FRE</i>	<i>Full Richardson Extrapolation</i>
<i>GCI</i>	<i>Grid Convergence Index</i>
<i>HDMA</i>	<i>HeptaDiagonal Matrix Algorithm</i>
<i>MDF</i>	Método de diferenças finitas
<i>MER</i>	MultiExtrapolação de Richardson
<i>MGCA</i>	MultiGrid de Correções Aditivas
<i>MSI</i>	<i>Modified Strongly Implicit</i>
<i>MVF</i>	Método de volumes finitos
<i>PDMA</i>	<i>PentaDiagonal Matrix Algorithm</i>



<i>RE</i>	<i>Richardson Extrapolation</i>
<i>RRE</i>	<i>Repeated Richardson Extrapolation</i>
<i>TDMA</i>	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i>

# LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Matriz dos coeficientes do sistema linear
$a_D, a_S, a_W, a_P, a_E, a_N, a_U$	Coefficientes do sistema linear do problema analisado
$\mathbf{b}$	Vetor dos termos fontes do sistema linear
$b_0, b_1, \dots$	Coefficientes das diferenças divididas de Newton
$b_P$	Termo fonte do sistema linear do problema analisado
$c_j$	Coefficientes $j$ dos termos do erro de truncamento
$C_\infty$	Correção obtida pelo método CRE para os nós coincidentes
$d_p$	Diferença entre duas ordens verdadeiras consecutivas dos termos do erro de discretização
$d_i$	Grau da interpolação utilizada
$E_h$	Erro de discretização
$E_i$	Erro de iteração
$E_p$	Erro de programação
$E_T$	Erro de truncamento
$E_\Pi$	Erro de arredondamento
$Em8$	Erro de discretização usando variáveis de precisão dupla
$Em16$	Erro de discretização usando variáveis de precisão quádrupla
$f$	Termo fonte da equação de Poisson 3D
$f_n$	Função de interpolação obtida via diferenças divididas de Newton
$F_S$	Fator de segurança para o estimador GCI
$g$	Malha de interesse
$h$	Distância entre nós, ou também, comprimento de elementos de malha
$h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$	Tamanho do elemento de malha para as malhas mais grosseiras até as malhas mais finas, respectivamente

$k$	Coeficiente linear do tempo de CPU
$Li_i$	Média da norma $L_1$ do erro de iteração verdadeiro na iteração $i$
$Lr_i$	Média da norma $L_1$ do resíduo do sistema linear na iteração $i$
$L_x$	Comprimento do domínio de cálculo na direção $x$
$L_y$	Comprimento do domínio de cálculo na direção $y$
$L_z$	Comprimento do domínio de cálculo na direção $z$
$L\phi$	Média da norma $L_1$ do erro de discretização
$m$	Nível de extrapolação
$\dot{m}$	Fluxo de massa $[kg/s]$
$n$	Número de pontos, volumes ou o tamanho do problema
$O$	Ordem de acurácia da interpolação implementada
$p$	Expoente do tempo de CPU
$p_0$	Ordem assintótica da aproximação numérica utilizada
$p_m$	Ordem verdadeira no nível de extrapolação $m$
$p_{E^*}$	Ordem efetiva equivalente
$p_{max}$	Máxima ordem de acurácia obtida pela solução numérica extrapolada
$p_{U^*}$	Ordem aparente equivalente
$p_{v^*}$	Ordem verdadeira
$P$	Pressão $[Pa]$
$Q_e$	Taxa de transferência de calor no contorno leste $[W]$
$r$	Razão de refino
$re$	Resíduo do sistema linear
$r_{quad}$	Coeficiente de determinação da regressão linear empregada, também referenciado como $R^2$
$Re$	Número de Reynolds
$S^\phi$ , $S^\omega$ e $S^\psi$	Termo fonte da equação diferencial parcial

$S_{Shih}$	Termo fonte do problema de Shih
$t$	Espessura na direção coordenada z [m]
$t_{CPU}$	Tempo de CPU
$\bar{T}$	Temperatura média [K]
$u$	Velocidade axial [m/s]
$U_{GCI}$	Estimador de erro de discretização GCI
$U_{Ri}$	Estimador de erro de discretização de Richardson
$v$	Velocidade transversal [m/s]
$x$	Direção coordenada x ou posição de interesse [m]
$x^*$	Vetor inexato das incógnitas do sistema linear
$y$	Direção coordenada y [m]
$z$	Direção coordenada z [m]

#### Letras Gregas

$\Gamma$	Constante do termo difusivo da equação diferencial parcial [adim.]
$\kappa$	Condutividade térmica do meio [W/mK]
$\Lambda$	Valor verdadeiro da função analisada
$\Lambda^i$	Valor da derivada de ordem i da função analisada
$\mu$	Viscosidade dinâmica do meio [Pa.s]
$\omega$	Função vorticidade [1/s]
$\pi$	Constante trigonométrica
$\phi$	Solução numérica
$\Phi$	Solução analítica exata ou incógnita do problema
$\phi_{an}$	Estimativa inicial analítica monocoefficiente
$\phi_{an,bc}$	Estimativa inicial analítica bicoefficiente
$\phi_{an,trc}$	Estimativa inicial analítica tricoefficiente

$\phi_{an,tec}$	Estimativa inicial analítica tetracoeficiente
$\phi_{an,pc}$	Estimativa inicial analítica pentacoeficiente
$\phi_h$	Estimativa inicial numérica monocoeficiente
$\phi_{h,bc}$	Estimativa inicial numérica bicoeficiente
$\phi_{h,trc}$	Estimativa inicial numérica tricoeficiente
$\phi_{h,tec}$	Estimativa inicial numérica tetracoeficiente
$\phi_i$	Solução numérica na iteração $i$
$\phi_{ex}$	Solução numérica exata
$\phi_{\infty}$	Solução numérica extrapolada
$\psi$	Função corrente [ $m^2/s$ ]
$\rho$	Massa específica do meio [ $kg/m^3$ ]

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>25</b>
1.1	DEFINIÇÃO E IMPORTÂNCIA DO PROBLEMA	25
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	28
1.3	OBJETIVOS	29
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	30
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>32</b>
2.1	ERRO NUMÉRICO	32
2.1.1	Erro de arredondamento	32
2.1.2	Erro de truncamento	32
2.1.3	Erro de iteração	34
2.1.4	Erro de programação	34
2.1.5	Erro de discretização	35
2.2	ESTIMATIVAS DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO	35
2.2.1	Estimativa de erros <i>a priori</i>	35
2.2.2	Estimativa de erros <i>a posteriori</i>	36
2.2.3	Ordem efetiva equivalente	36
2.2.4	Ordem aparente equivalente	37
2.3	REDUÇÃO DO ERRO DE ITERAÇÃO	38
2.3.1	O método multigrid	38
2.4	REDUÇÃO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO	39
2.4.1	Extrapolação de Richardson	40
2.4.2	Múltiplas extrapolações de Richardson	41
2.4.3	Extrapolação de Richardson completa	42
2.5	INTERPOLAÇÃO POR DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE NEWTON	43
2.6	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	44
2.6.1	Método das diferenças finitas	44
2.6.2	Método dos volumes finitos	45
2.7	RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES RESULTANTE DO PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO	46
2.8	CONSIDERAÇÕES	47
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>48</b>
3.1	MODELOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS	48
3.1.1	Modelo numérico geral	48

3.1.2	Problema 1: Laplace 2D . . . . .	49
3.1.3	Problema 2: Advecção-Difusão 2D . . . . .	51
3.1.4	Problema 2.1: Advecção-Difusão 2D Modificado . . . . .	53
3.1.5	Problema 3: Burgers 2D . . . . .	54
3.1.6	Problema 4: Navier-Stokes 2D . . . . .	56
3.1.7	Problema 5: Laplace 3D . . . . .	59
3.1.8	Problema 6: Poisson 3D . . . . .	62
3.2	INTERPOLAÇÃO . . . . .	63
3.3	REDUÇÃO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO . . . . .	65
3.4	REDUÇÃO DO ERRO DE ITERAÇÃO . . . . .	67
3.4.1	Estimativa da solução analítica . . . . .	68
3.4.2	Numérico monocoeficiente . . . . .	69
3.4.3	Numérico bicoeficiente . . . . .	70
3.4.4	Numérico tricoeficiente . . . . .	71
3.4.5	Numérico tetracoeficiente . . . . .	72
3.4.6	Analítico monocoeficiente . . . . .	74
3.4.7	Analítico bicoeficiente . . . . .	75
3.4.8	Analítico tricoeficiente . . . . .	75
3.4.9	Analítico tetracoeficiente . . . . .	76
3.4.10	Analítico pentacoeficiente . . . . .	78
3.5	ERRO DE DISCRETIZAÇÃO, CRITÉRIO DE PARADA DO SISTEMA ITERATIVO E ERRO DE ITERAÇÃO . . . . .	79
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1	LAPLACE 2D DF . . . . .	81
4.1.1	Solvers . . . . .	82
4.1.2	Erro de iteração . . . . .	82
4.1.3	Erro de discretização . . . . .	86
4.2	LAPLACE 2D VF . . . . .	88
4.2.1	Erro de iteração . . . . .	89
4.2.2	Erro de discretização . . . . .	90
4.3	ADVECÇÃO-DIFUSÃO 2D DF . . . . .	90
4.3.1	Solvers . . . . .	90
4.3.2	Erro de iteração . . . . .	91
4.3.3	Erro de discretização . . . . .	94
4.4	ADVECÇÃO-DIFUSÃO 2D VF . . . . .	95
4.4.1	Erro de iteração . . . . .	96
4.4.2	Erro de discretização . . . . .	97
4.5	ADVECÇÃO-DIFUSÃO 2D MODIFICADO DF . . . . .	97
4.5.1	Erro de iteração . . . . .	98

4.5.2	Erro de discretização . . . . .	99
4.6	ADVECCÃO-DIFUSÃO 2D MODIFICADO VF . . . . .	100
4.6.1	Erro de iteração . . . . .	101
4.6.2	Erro de discretização . . . . .	102
4.7	BURGERS 2D DF . . . . .	103
4.7.1	Erro de iteração . . . . .	103
4.7.2	Erro de discretização . . . . .	103
4.8	BURGERS 2D VF . . . . .	105
4.8.1	Erro de iteração . . . . .	106
4.8.2	Erro de discretização . . . . .	106
4.9	NAVIER-STOKES 2D DF . . . . .	108
4.9.1	Erro de iteração . . . . .	109
4.9.2	Erro de discretização . . . . .	110
4.10	NAVIER-STOKES 2D VF . . . . .	111
4.10.1	Erro de iteração . . . . .	112
4.10.2	Erro de discretização . . . . .	112
4.11	LAPLACE 3D DF . . . . .	113
4.11.1	Erro de iteração . . . . .	114
4.11.2	Erro de discretização . . . . .	114
4.12	LAPLACE 3D VF . . . . .	116
4.12.1	Erro de iteração . . . . .	116
4.12.2	Erro de discretização . . . . .	116
4.13	POISSON 3D DF . . . . .	117
4.13.1	Erro de iteração . . . . .	118
4.13.2	Erro de discretização . . . . .	118
4.14	POISSON 3D VF . . . . .	119
4.14.1	Erro de iteração . . . . .	119
4.14.2	Erro de discretização . . . . .	119
4.15	RESUMO DOS RESULTADOS . . . . .	120
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>125</b>
5.1	CONTRIBUIÇÕES . . . . .	126
5.2	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	127
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>128</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>132</b>
	<b>APÊNDICE A – ERRO DE DISCRETIZAÇÃO . . . . .</b>	<b>133</b>



A.1	LAPLACE 2D DF . . . . .	133
A.2	LAPLACE 2D VF . . . . .	133
A.3	BURGERS 2D DF . . . . .	134
A.4	BURGERS 2D VF . . . . .	136
A.5	NAVIER-STOKES 2D DF . . . . .	137
A.6	NAVIER-STOKES 2D VF . . . . .	138
A.7	LAPLACE 3D DF . . . . .	139
A.8	LAPLACE 3D VF . . . . .	140
A.9	LAPLACE 3D DF . . . . .	141
A.10	LAPLACE 3D VF . . . . .	142
	<b>APÊNDICE B – ERROS DE ITERAÇÃO . . . . .</b>	<b>144</b>
B.1	ADVECÇÃO-DIFUSÃO MODIFICADO 2D DF . . . . .	144
B.2	ADVECÇÃO-DIFUSÃO MODIFICADO 2D VF . . . . .	145
B.3	BURGERS 2D DF . . . . .	146
B.4	BURGERS 2D VF . . . . .	146
B.5	NAVIER-STOKES 2D DF . . . . .	148
B.6	NAVIER-STOKES 2D VF . . . . .	150
B.7	LAPLACE 3D DF . . . . .	151
B.8	LAPLACE 3D VF . . . . .	152
B.9	POISSON 3D DF . . . . .	153
B.10	POISSON 3D VF . . . . .	154
	<b>APÊNDICE C – DEDUÇÃO DOS MÉTODOS PDMA E HDMA .</b>	<b>158</b>
C.1	MÉTODO PDMA . . . . .	158
C.2	MÉTODO PDMA - PRIMEIRA SIMPLIFICAÇÃO . . . . .	159
C.3	MÉTODO PDMA - SEGUNDA SIMPLIFICAÇÃO . . . . .	160
C.4	MÉTODO HDMA . . . . .	161
	<b>APÊNDICE D – DEDUÇÃO DO COMPORTAMENTO TEÓRICO DA EXTRAPOLAÇÃO DE RICARDSON PARA UMA APROXIMAÇÃO ISOLADA . . . . .</b>	<b>163</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado a definição e importância do problema, a revisão bibliográfica, os objetivos e a organização do trabalho.

## 1.1 DEFINIÇÃO E IMPORTÂNCIA DO PROBLEMA

Ao longo do tempo a espécie humana propôs formas de resolver problemas, por exemplo: ao se utilizar de ferramentas para caçar, começou a perder menos tempo nesta atividade e pôde se dedicar a pensar e resolver os outros problemas que a cercava. Fazendo uma analogia desse pensamento, no momento da criação dos computadores, havia apenas a necessidade de realizar cálculos rapidamente, mas não se sabia na época que isso iria alavancar muitos outros recursos e facilitar a vida moderna.

Ao realizar cálculos rapidamente, surgiu a possibilidade de resolver sistemas de equações cada vez maiores com o auxílio do computador. Foi viabilizado, portanto, o uso dos métodos numéricos para simular problemas físicos, entretanto depende do responsável pela simulação interpretar os resultados e confiar ou não em seus valores.

Os problemas da engenharia são resolvidos pelo uso simultâneo de teorias que simulam os fenômenos físicos e testes experimentais que validam estas teorias e as previsões esperadas. Se isto não ocorrer recorre-se a modificar a teoria ou a modelagem do fenômeno físico ou até a forma como o teste experimental é executado.

Por exemplo: a medição de força de arrasto sobre um minifoguete em túnel de vento. É uma medição experimental sujeita a imprecisões dos instrumentos utilizados, além disto as características do experimento podem influenciar no resultado final.

Para simular este fenômeno há diversas teorias de escoamento turbulento que podem ser utilizadas, entretanto não há um único modelo de turbulência que possa ser utilizado em todas as simulações, portanto a comparação teórico-experimental é indispensável.

Ao verificar que determinado fenômeno físico segue, em uma certa tolerância, o comportamento da teoria aplicada, por exemplo, utilizando um modelo para simular a transferência de calor em determinado problema, se o erro entre o experimento real e a simulação for menor que 1%, é possível utilizar esta teoria para projeto de novos produtos para o mercado, otimizar processos e economizar recursos, como matéria prima, tempo e mão de obra.

No caso de resolver numericamente processos que envolvam fenômenos de transporte,

como transferência de calor, quantidade de movimento e/ou massa, está-se envolvendo a chamada Dinâmica dos Fluidos Computacional (em inglês, Computational Fluid Dynamics - CFD), que consiste basicamente na aplicação de métodos numéricos para resolver equações que representam o problema de fluidos em movimento, que incluem todos os fenômenos de transporte (FORTUNA, 2000).

Vários autores (MALISKA, 2010; TANNEHILL *et al.*, 1997) fazem distinção entre métodos experimentais e teóricos, citando que os métodos teóricos são aqueles que resolvem de forma analítica ou numérica os modelos matemáticos que representam o fenômeno físico, e métodos experimentais são aqueles que trabalham diretamente com o fenômeno real por meio de protótipos e/ou modelos em escala. No entanto, nos dias atuais todos estes métodos estão interligados para resolver o problema em análise da forma mais confiável e eficiente possível.

Ao resolver numericamente os modelos matemáticos que simulam os fenômenos físicos, requer-se que sejam utilizados métodos que apresentam soluções numéricas acuradas, ou seja, que apresentem soluções muito próximas da solução analítica do problema, a qual geralmente é desconhecida.

Pelo fato de, geralmente, utilizar-se de sistemas iterativos e aproximações numéricas para os termos das equações diferenciais do modelo matemático, cria-se a necessidade de controlar o erro numérico (detalhado na seção 2 do presente documento), cujas principais fontes são: erro de truncamento, erro de iteração, erro de arredondamento e erro de programação (MARCHI, 2001).

Os efeitos do erro de truncamento resultam no denominado erro de discretização, sendo a discretização uma repartição do domínio contínuo em um domínio discreto de pontos nos quais as equações diferenciais que modelam o problema serão aproximadas.

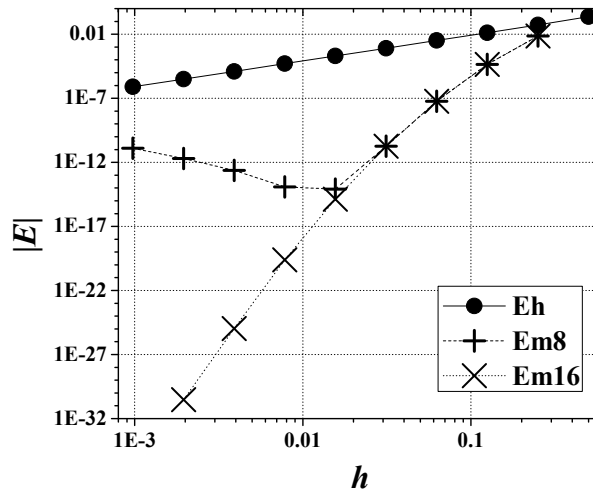
O objetivo do presente trabalho é utilizar técnicas desenvolvidas pelo autor e por outros para reduzir erros de iteração antes da obtenção da solução, após a convergência do problema reduzir também o erro de discretização da solução obtida.

Um exemplo de redução do erro de discretização está mostrado na Fig. 1.1.

Na Fig. 1.1, conforme o artigo de Moro e Marchi (2016), nota-se o comportamento do erro de discretização de uma variável pontual do domínio: dado via solução direta do código (Eh), e após usar o pós processamento chamado múltiplas extrapolações de Richardson (Em8 e Em16), utilizando precisão dupla e quádrupla respectivamente, em função do tamanho de malha utilizado ( $h$ ).

Para reduzir o erro de iteração uma alternativa seria utilizar infinitas iterações; claro que esta metodologia é inviável pois infinitas iterações iria consumir tempo infinito. Uma técnica mais aceitável para reduzir este erro rapidamente é utilizar um sistema iterativo de alta taxa de convergência, como o método multigrid (BRIGGS *et al.*, 2000),

Figura 1.1 – Comportamento do erro de discretização em três casos distintos variando o tamanho de malha utilizado ( $h$ ) (MORO; MARCHI, 2016).



ou ainda estimar uma solução inicial para dar início no processo iterativo que é muito próxima da solução numérica final.

Uma redução do erro de discretização pode ser obtida ao refinar a malha numérica utilizada, cuja desvantagem é o aumento da memória e custo computacional requerido, ou ainda aumentar a acurácia da solução empregando métodos de alta ordem, o que tende a tornar o modelo numérico muito complexo ou ainda utilizar-se de métodos de extrapolação.

Um método de extrapolação pode ser entendido por qualquer transformação aplicada a uma sequência de escalares ou vetores. No entanto para ser eficaz, este deve levar em conta o comportamento assintótico da sequência que se deseja extrapolar. Entre estes métodos a extrapolação de Richardson (ER) ou em inglês Richardson Extrapolation (RE) é a utilizada neste trabalho (RICHARDSON; GAUNT, 1927).

A extrapolação de Richardson pode ser utilizada de várias formas, uma delas é a estimativa do erro de discretização que resulta em um valor considerado a parte mais significativa do erro numérico, isto se o comportamento do erro numérico for convergente (MARCHI, 2001).

Outra forma de utilizar a extrapolação de Richardson é aplicá-la para obter uma solução numérica de maior acurácia, se este procedimento for continuado de maneira sucessiva gera-se soluções cujas ordens de acurácia são cada vez maiores.

O processo sucessivo da extrapolação de Richardson é conhecido como MultiExtrapolação de Richardson (MER) ou em inglês Repeated Richardson Extrapolation (RRE) (DAHLQUIST; BJORCK, 2008).

Na Fig. 1.1 RRE está presente nas curvas Em8 e Em16 o erro de discretização após o uso de MER para uma variável de posição fixa genérica. Percebe-se que para precisão dupla (Em8) existe um limite no qual para valores menores de  $h$  MER não reduz mais

o erro de discretização, de fato o aumenta. Para precisão quádrupla (Em16) esse fato não foi demonstrado até a malha mais fina utilizada, mas é provável que o seria se houvesse mais malhas, dado que esse limite é o erro de máquina da precisão utilizada.

Há ainda a possibilidade de aplicar o processo MER em todo o campo de soluções, esta técnica é conhecida como Extrapolação de Richardson Completa (ERC) ou em inglês Completed Richardson Extrapolation (CRE) (ROACHE; KNUPP, 1993)

Outra técnica recente de extrapolação em campo foi desenvolvida por Giacomini (2013), conhecida como Extrapolação de Richardson Total (ERT) ou em inglês Full Richardson Extrapolation (FRE).

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na estimativa e redução de erro de iteração, Martins e Marchi (2008) propuseram o estimador empírico, o qual utiliza basicamente o comportamento exponencial do erro de iteração para estimá-lo, tendo sido testado em três problemas distintos: Poisson 1D, Laplace 2D e Navier-Stokes 2D.

O comportamento do estimador empírico nos três problemas estudados por Martins e Marchi (2008) pode ser dividido em três regimes: a) nas primeiras iterações o estimador não apresenta boa acurácia por causa do comportamento não assintótico do erro de iteração e b) o mesmo ocorre nas últimas iterações, em que o erro de arredondamento é mais significativo que o erro de iteração, c) entre estes dois extremos a acurácia tende a ser maior conforme o número de iterações aumenta.

Não se recomendada o estimador empírico para sistemas iterativos que utilizem o método multigrid e este estimador não foi utilizado para efetivamente reduzir o erro de iteração apenas estimá-lo.

No trabalho de Anunciação (2013) foram utilizados vários métodos de redução do erro de iteração, embora utilizados em conjunto com o método multigrid, o que Martins e Marchi (2008) citam que não apresenta comportamento monotônico e que dessa forma, os estimadores utilizados em seu trabalho (empírico (MARTINS; MARCHI, 2008), o estimador do trabalho de Ferziger e Perić (2002) e o estimador do trabalho de Roy e Blottner (2001)) não apresentam acurácia em nenhuma iteração, ponto este ainda em investigação na literatura.

Ainda no trabalho de Anunciação (2013) foi obtida uma pequena melhora nos tempos computacionais do multigrid utilizando o método Épsilon topológico; essa melhora restringiu-se no melhor dos casos a 1,4%.

A investigação neste trabalho se limitará a uma estimativa inicial acurada, desta forma é plausível que tanto nos métodos iterativos com multigrid ou sem haverá ganhos.

Há na literatura o método chamado multigrid completo em tradução livre, ou em inglês, Full MultiGrid (FMG), (BRIGGS *et al.*, 2000; YAN *et al.*, 2007; THEKALE *et al.*, 2010; BRÈTHES *et al.*, 2015) que se baseia em estimar uma aproximação inicial na malha de interesse ao interpolar a solução obtida em malhas mais grossas, o qual geralmente é uma interpolação linear (no caso 1D), bilinear (no caso 2D) ou trilinear (no caso 3D).

Já na redução de erro de discretização, Richardson e Gaunt (1927) propuseram a extrapolação de Richardson, que se baseia na eliminação do termo do erro de menor ordem da solução numérica. Nesse trabalho os autores utilizaram dois níveis de extrapolação na equação de Laplace 2D.

No entanto a extrapolação para todo o campo, ou extrapolação de Richardson completa (CRE) foi proposta por Roache e Knupp (1993), os autores resolveram as equações de Poisson 1D, advecção-difusão 1D e Poisson2D com apenas uma única extrapolação.

Recentemente, no trabalho de Giacomini (2013) foi utilizada a extrapolação em campo com mais níveis de extrapolação. Nesse trabalho a autora compara o uso de múltiplos níveis de CRE com o método FRE. Esse outro método atingiu uma ordem de acurácia de 16 ao aplicar sete níveis de extrapolação em campo para o problema de Poisson 1D.

Ainda no trabalho citado, foram testados também tanto CRE quanto FRE nos problemas de advecção-difusão 1D, Laplace 2D e Burgers 1D e 2D. Em todos os casos ambos os métodos conseguiram reduzir o erro de discretização em campo em apenas um nível de extrapolação no caso da aproximação CDS, levando a uma solução numérica com ordem de acurácia em todo o campo de 2 para 4 e apenas dois níveis de extrapolação no caso da aproximação UDS, levando a uma ordem de acurácia de 1 para 3.

Segundo a revisão há na literatura dois pontos em aberto: o primeiro é a redução do erro de iteração com uma estimativa inicial acurada melhor do que os métodos já existentes e outro é a redução do erro de discretização em campo com maior ordem de acurácia e em mais problemas do que obtido no trabalho de Giacomini (2013).

## 1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral da tese está listado abaixo.

1. Reduzir tempos de CPU de processos iterativos ao reduzir o erro de iteração usando uma estimativa inicial acurada e métodos de alta ordem de convergência (multigrid) em problemas bi e tridimensionais em malhas estruturadas uniformes usando o método das diferenças finitas (MDF) e volumes finitos (MVF) e reduzir erros de discretização das soluções numéricas em campo ao utilizar a extrapolação de Richardson completa (CRE) nestes mesmos problemas e métodos numéricos.

Os objetivos específicos são:

1. Desenvolver uma metodologia baseada em CRE para obter uma estimativa inicial mais acurada do que as existentes na literatura.
2. Aplicar esta metodologia tanto em problemas de diferenças finitas quanto volumes finitos e comparar o desempenho obtido, justificando desta forma a sua utilização.
3. Desenvolver uma metodologia baseada em múltiplos CRE para obter campo de soluções cada vez mais acurado, reduzindo dessa forma o erro de discretização do problema, atingindo resultados melhores e em mais problemas do que os existentes na literatura.
4. Aplicar essa metodologia tanto em problemas de diferenças finitas quanto volumes finitos demonstrando as suas diferenças e analisar os resultados.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A organização do documento é a seguinte:

- Capítulo 2, Fundamentação teórica: são mostrados conceitos e aspectos teóricos sobre erros numéricos, estimadores de erros de discretização, formas de redução de erros de iteração e discretização, métodos numéricos utilizados (MDF e MVF), solvers utilizados e a interpolação polinomial por diferenças divididas de Newton.
- Capítulo 3, Metodologia: são apresentados os modelos matemáticos e numéricos resolvidos neste trabalho, formas de interpolação para MDF e MVF, forma de redução do erro de discretização e iteração, além das métricas utilizadas para a apresentação dos resultados.
- Capítulo 4, Resultados e Discussão: são apresentados os resultados para cada problema-modelo apresentado, tanto usando MDF quanto MVF e uma análise e discussão dos resultados é mostrada.
- Capítulo 5, Conclusão: as contribuições deste trabalho são apresentadas juntamente com propostas para trabalhos futuros.
- Apêndice A: os gráficos e dados referentes aos erros de discretização são apresentados. Nesse apêndice ficam os resultados de variáveis secundárias não obrigatórios no decorrer do texto para o entendimento do trabalho.
- Apêndice B: os gráficos e dados referentes aos erros de iteração são apresentados. Nesse apêndice ficam os resultados de estimativas iniciais não obrigatórios no decorrer do texto para o entendimento do trabalho.

- Apêndice C: baseado em trabalhos anteriores e otimizações possíveis, nesse apêndice são mostrados: o método PDMA de cinco diagonais para problemas bidimensionais e sua versão HDMA para sete diagonais para problemas tridimensionais da forma a reduzir custos computacionais.
- Apêndice D: é apresentada a dedução de uma aproximação obtida através da ER para uma derivada primeira genérica.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo há a fundamentação teórica necessária para o leitor compreender os conceitos utilizados nesse trabalho. Contando com a definição dos erros numéricos, estimativas do erro de discretização, redução de erros de iteração e discretização, solvers e formas de interpolação utilizadas.

Para compreender a redução dos tipos de erros numéricos investigados nesta tese, faz-se necessário a apresentação da definição de erro numérico.

### 2.1 ERRO NUMÉRICO

O erro numérico pode ser definido (FERZIGER; PERIĆ, 2002) pela diferença entre a solução analítica exata ( $\Phi$ ) e a solução numérica ( $\phi$ ) de uma variável de interesse, ou seja,

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (2.1)$$

Esse erro pode ser causado por diferentes fontes (MARCHI, 2001), tais como: erros de arredondamento, erros de truncamento, erros de iteração e erros de programação.

#### 2.1.1 Erro de arredondamento

Os erros de arredondamento ( $E_{\Pi}$ ) aparecem pela representação finita dos números nos cálculos matemáticos. Eles dependem tanto do software utilizado (compilador, sistema operacional) para realizar os cálculos quanto do hardware utilizado (computador, arquitetura, processador) adotado na execução do código computacional.

Quanto maior for a precisão adotada na representação dos números utilizados, menor será este tipo de erro (MARCHI, 2001), embora em contrapartida, a memória e os tempos de computação necessários para lidar com precisões maiores serão efetivamente maiores.

Neste trabalho o erro de arredondamento foi reduzido ao mínimo possível: todos os códigos foram implementados em linguagem Fortran 95 e em precisão quádrupla.

#### 2.1.2 Erro de truncamento

Os erros de truncamento ( $E_T$ ) surgem quando um processo infinito é truncado, ou seja, ao realizar uma aproximação para um modelo matemático contínuo por um modelo

numérico discreto.

Por exemplo, ao formular a aproximação para a primeira derivada de uma função numa malha de diferenças finitas obtém-se (FORTUNA, 2000),

$$\begin{aligned} \Lambda_p^i &= \frac{\lambda_{p+h} - \lambda_{p-h}}{2h} - \Lambda_p^{iii} \frac{h^2}{6} - \Lambda_p^v \frac{h^4}{120} - \Lambda_p^{vii} \frac{h^6}{5040} \\ &\quad - \Lambda_p^{ix} \frac{h^8}{362880} - \Lambda_p^{xi} \frac{h^{10}}{39916800} + \dots \\ &\quad \text{ou} \\ \Lambda_p^i &= \frac{\lambda_{p+h} - \lambda_{p-h}}{2h} - \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_p^{[2i+3]} \frac{h^{2i+2}}{(2i+3)!} \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que o superíndice de  $\Lambda_p$  indica a ordem da derivada.

Nota-se na equação (2.2) que os termos que representam o erro são múltiplos de uma progressão do espaçamento entre nós  $h$ , mas para uma aproximação mais genérica, não se conhece a priori os coeficientes de  $h$ , portanto pode-se generalizar o termo que representa o erro de truncamento da aproximação na Eq. (2.2) através de,

$$E_T = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h^{p_v(i)} \quad (2.3)$$

em que os coeficientes  $c_i$  serão funções da variável dependente e de suas derivadas e independem de  $h$ .

As ordens verdadeiras da aproximação, também chamadas ordens de acurácia ( $p_v$ ) são os expoentes de  $h$  dos termos não nulos da Eq. (2.3) e são geralmente números inteiros que seguem uma progressão geométrica.

No exemplo da Eq. (2.2) as ordens verdadeiras são expressas por:  $p_v(i) = 2i + 2$ , ou 2, 4, 6... . O menor expoente de  $h$  é chamado de ordem assintótica da aproximação e denotado por  $p_0$ .

Conforme  $h$  diminui o termo dominante do  $E_T$  é dado por  $c_0 h^{p_0}$ , ou seja, a parcela assintótica da aproximação. O valor de  $h$ , para uma malha uniforme em ambas as direções, é dado pela repartição do domínio de cálculo nos elementos ou volumes.

O procedimento de repartição do domínio contínuo em discreto é chamado de discretização do domínio de cálculo e se os tamanhos dos elementos ou volumes são iguais, essa discretização é dita uniforme.

O objetivo da discretização é obter pontos ou nós nos quais será aproximada a equação ou equações do modelo matemático.

### 2.1.3 Erro de iteração

Os erros de iteração ( $E_i$ ) surgem da parada em determinado ponto de um sistema iterativo (MARTINS; MARCHI, 2008).

Este sistema iterativo pode ter sido gerado por: resolução iterativa do sistema de equações obtido pela discretização do modelo matemático; resolução de um modelo matemático não linear ou ainda que os coeficientes da matriz do sistema de equações ou seu termo fonte sejam dependentes da incógnita; resolução de modelo matemático com duas ou mais equações, sendo cada uma resolvida separadamente entre outras.

Para avaliar-se o erro de iteração verdadeiro do problema de interesse (FERZIGER; PERIĆ, 2002) é necessário calcular a diferença entre a solução numérica exata ( $\phi_{ex}$ ) e a solução numérica para cada iteração  $i$  ( $\phi_i$ ), isto é,

$$E_i = \phi_{ex} - \phi_i \quad (2.4)$$

Se a solução de um problema converge para uma solução única, tem-se para  $i \rightarrow \infty$  que  $E_i \rightarrow 0$ . Maior detalhamento pode ser visto no artigo de Martins e Marchi (2008).

### 2.1.4 Erro de programação

Os erros de programação ( $E_p$ ) podem surgir por descuido ou falta de compreensão dos elementos de programação utilizados pelo programador.

Segundo Roache (1998) esses erros basicamente são originados por: implementação incorreta do modelo numérico na aproximação do modelo matemático (aproximação diferente do desejado); implementação incorreta do programa computacional para resolver o modelo numérico; uso incorreto do programa computacional para obter a solução numérica; qualquer outra fonte eventual de erro.

Para minimizar este tipo de erro Maliska (2010) e Roache (1998) citam formas como: implementar um programa específico e em seguida generalizá-lo; resolver um problema semelhante via método das soluções fabricadas (KNUPP; SALARI, 2003) e analisar se, ao fazer  $h \rightarrow 0$ , as ordens efetiva e aparente tendem à ordem assintótica da aproximação, entre outras formas.

Neste trabalho o erro de programação foi reduzido ao mínimo possível com o uso de revisões e verificação do código, ou seja, analisou-se se o modelo numérico resolve efetivamente o modelo matemático.

Alguns códigos como Burgers 2D DF e Navier-Stokes 2D DF foram implementados por integrantes do grupo de pesquisa e foram verificados anteriormente (SANTIAGO, 2010).

### 2.1.5 Erro de discretização

Se as demais fontes de erro forem eliminadas ou reduzidas, os efeitos do erro de truncamento resultam no erro de discretização ( $E_h$ ) (FERZIGER; PERIĆ, 2002).

Embora a definição deste erro envolva conhecida a solução analítica do problema, ela só está disponível em casos simplificados, para casos mais gerais pode-se estimar o erro de discretização por algumas formas.

## 2.2 ESTIMATIVAS DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Há duas formas distintas de estimativa de erros de discretização: *a priori* e *a posteriori*.

A estimativa de erro *a priori* é obtida sem calcular a solução numérica: se obtém o comportamento esperado do erro de discretização conhecendo-se a aproximação numérica aplicada.

### 2.2.1 Estimativa de erros *a priori*

Para estimar o comportamento do erro de discretização *a priori* basta obter a ordem assintótica ( $p_0$ ) da aproximação numérica utilizada.

A forma teórica com que o erro de discretização reduzirá ao refinar a malha utilizada é dada pelo limite em que  $h \rightarrow 0$  do erro de truncamento, mostrado na Eq. (2.3), ou seja, apenas o seu primeiro termo, o que resulta em,

$$E_h \approx c_0 h^{p_0} \quad (2.5)$$

No entanto sem a solução numérica, não é possível efetivamente estimar o erro de discretização, apenas obter a forma teórica na qual ele irá reduzir ao refinar a malha.

Se por exemplo for conhecido o erro de discretização de duas malhas consecutivas, malha 1 e malha 2 em que a malha 2 possui mais elementos que a malha 1, ou seja,  $h_2 < h_1$ , basta substituir na Eq. (2.5) e será possível obter a razão dos erros de discretização consecutivos conforme segue,

$$\begin{cases} E_h(\phi_1) \approx c_0 h_1^{p_0} \\ E_h(\phi_2) \approx c_0 h_2^{p_0} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\frac{E_h(\phi_1)}{E_h(\phi_2)} \approx \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{p_0}$$

Analisando a Eq. (2.6) percebe-se que quanto maior for o valor da ordem assintótica e/ou quanto maior for a razão de refino  $r = \frac{h_1}{h_2}$  maior será a redução no erro de discretização.

### 2.2.2 Estimativa de erros *a posteriori*

Ao obter a solução numérica do problema é possível estimar efetivamente o erro de discretização. A forma apresentada é baseada em múltiplas malhas e pode ser utilizada aplicando-se os métodos de diferenças finitas (FORTUNA, 2000) e volumes finitos (PATANKAR, 1980).

Segundo Marchi (2001) há alguns estimadores que podem ser aplicados: delta, Richardson, GCI (Grid Convergence Index), multicoeficientes, convergente e soluções numéricas coerentes. Serão mostrados apenas os mais importantes para o presente trabalho.

O estimador de Richardson (RICHARDSON; GAUNT, 1927) que será melhor explicado na seção 2.4.1 consiste em,

$$U_{Ri}(\phi_2) = \frac{\phi_2 - \phi_1}{r^{p_0} - 1} \quad (2.7)$$

Já o estimador GCI (ROACHE, 1994) é baseado no valor absoluto do estimador de Richardson com um fator de segurança para 95% de confiabilidade e duas soluções numéricas ( $F_S = 3$ ) por,

$$U_{GCI}(\phi_2) = F_S |U_{Ri}(\phi_2)| \quad (2.8)$$

Estas estimativas do erro de discretização são de valia para a avaliação do erro absoluto da solução numérica, mas não ratificam a ordem das aproximações utilizadas, há a possibilidade de avaliar *a posteriori* as ordens verdadeiras da aproximação pela ordem efetiva equivalente ( $p_{E*}$ ) e a ordem aparente equivalente ( $p_{U*}$ ).

### 2.2.3 Ordem efetiva equivalente

Segundo Marchi e Silva (2002) o termo do erro de discretização que é dominante é o primeiro (o qual possui a ordem mais baixa da potência de  $h$ ) para  $h \rightarrow 0$ .

Se a solução analítica ( $\Phi$ ) da variável de interesse ( $\phi$ ) é conhecida, é possível avaliar a ordem com que o erro de discretização reduz com o refino de malha usando-se duas malhas consecutivas, ordem esta chamada de ordem efetiva equivalente, obtida e dada por,

$$\begin{cases} \Phi - \phi_1 = K_0 h_1^{p_{E*}} \\ \Phi - \phi_2 = K_0 h_2^{p_{E*}} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$p_{E^*} = \frac{\log \left( \left| \frac{\Phi - \phi_1}{\Phi - \phi_2} \right| \right)}{\log(r)} \quad (2.10)$$

Nota-se pela Eq. (2.10) que para calcular o seu valor é necessário conhecer a solução analítica do problema avaliado se a solução analítica não é conhecida é possível obter outra ordem, a ordem aparente equivalente.

#### 2.2.4 Ordem aparente equivalente

A ordem aparente equivalente pode ser avaliada ao se formular um sistema de equações envolvendo três malhas e três incógnitas, semelhante às Eqs. (2.9) e (2.10), só que é desconhecido o erro de discretização verdadeiro, ou seja, esta forma de avaliar a ordem de acurácia pode ser aplicada em problemas onde a solução analítica não é conhecida.

É possível estimar o erro de discretização, ao considerar o valor  $\phi_\infty$  como uma estimativa mais acurada para a solução do problema. Assim, o sistema de equações e a solução para  $p_{U^*}$  considerando razão de refino ( $r$ ) constante são dadas por,

$$\begin{cases} \phi_\infty - \phi_1 = K_0 h_1^{p_{U^*}} \\ \phi_\infty - \phi_2 = K_0 h_2^{p_{U^*}} \\ \phi_\infty - \phi_3 = K_0 h_3^{p_{U^*}} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$p_{U^*} = \frac{\log \left( \left| \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_2} \right| \right)}{\log(r)} \quad (2.12)$$

Para o caso onde a razão de refino é variável, tem-se, (MARCHI; SILVA, 1999).

$$p_{U^*} = \frac{\log \left[ \left| \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_2} \right| \frac{\left( \frac{h_2}{h_3} \right)^{p_{U^*}} - 1}{\left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{p_{U^*}} - 1} \right]}{\log \left( \frac{h_1}{h_2} \right)} \quad (2.13)$$

Notando que a Eq. (2.13) é transcendental, ou seja, a própria solução é parte do cálculo, isto significa que esta equação só pode ser resolvida por algum método numérico.

É de interesse deste trabalho a minimização tanto de  $E_h$  quanto de  $E_i$ , portanto é mostrado a seguir algumas propostas para redução destas duas fontes de erro.

## 2.3 REDUÇÃO DO ERRO DE ITERAÇÃO

Para reduzir os erros de iteração faz-se uso de duas abordagens distintas: a primeira é uma estimativa inicial bem acurada e muito próxima da solução numérica que se deseja encontrar, e a segunda é utilizar métodos de alta taxa de convergência para a resolução de sistemas lineares, como o método multigrid.

A primeira forma de redução do erro de iteração não é muito bem explorada na literatura, de fato o método mais conhecido de estimativa inicial é apenas uma interpolação da solução na malha anterior para a malha de interesse.

O método Multigrid Completo ou em inglês *Full Multigrid Method* (FMG) (BRIGGS *et al.*, 2000), consiste em resolver o problema e obter a solução em malhas grosseiras usando o método multigrid, interpolando a solução para a malha seguinte usando um tipo de interpolação e repetindo o processo até a malha de interesse.

Já o segundo método é amplamente divulgado na literatura e é utilizado em diversos softwares comerciais na simulação de escoamento de fluidos, transferência de calor, entre outros.

### 2.3.1 O método multigrid

Os métodos iterativos em geral são mais adequados na resolução de malhas com número elevado de nós em dinâmica dos fluidos computacional (TANNEHILL *et al.*, 1997), devido principalmente à matriz dos coeficientes apresentar diagonais esparsas.

Métodos iterativos como o método Gauss-Seidel possuem baixa taxa de convergência, ou seja, precisam de muitas iterações para chegar-se na solução numérica do problema, o que é um grande empecilho na resolução de problemas com elevado número de nós (PAZ *et al.*, 2006). Para suprir esta necessidade surgiu o método multigrid (BRIGGS *et al.*, 2000).

Os métodos iterativos mencionados possuem uma boa suavização do erro de iteração, ou seja, o erro de iteração que era uma função oscilatória se torna suave em poucas iterações.

Há no entanto uma perda de desempenho no método iterativo quando o erro de iteração já era suave e se aplica novamente o método iterativo.

O ponto chave do método multigrid está em um procedimento para deixar este erro que antes era suave em uma função oscilatória e aplicar novamente o método iterativo para suavizá-lo e repetir o processo até a convergência da solução.

Há variações do método multigrid, mas em geral esses métodos apresentam uma hierarquia de malhas, geradas por um engrossamento da malha.

Para o esquema mais simples de multigrid aplicável a sistemas de equações com matriz dos coeficientes constante é o esquema chamado Correction Scheme (CS) idealizado

em quatro passos distintos: suavização, restrição, prolongamento e correção (BRIGGS *et al.*, 2000). O método utiliza-se do solver Gauss-Seidel ou Gauss-Seidel red-black na sua maioria, para suavizar o erro de iteração na malha em que a solução é desejada.

O resíduo é transferido da malha desejada via operador de restrição para uma malha mais grossa e suaviza-se a correção. O processo é repetido até a malha mais grossa utilizada na simulação que pode compreender, por exemplo, um único elemento, nó ou volume.

Na última malha, transferem-se as correções via operador de prolongamento da malha mais grossa para a malha mais fina e suaviza-se novamente, até chegar na malha em que a solução é desejada, na qual é aplicada a correção. Este processo é denominado ciclo V e é realizado até satisfazer um critério para o erro de iteração.

O procedimento citado anteriormente é o esquema CS. O esquema FAS por sua vez transfere via operadores de restrição e prolongação a própria solução e resíduo de cada malha até a malha mais grossa utilizada, retornando no ciclo V, obtendo e aplicando a correção para cada malha até chegar-se na última em que a solução é desejada.

Em relação aos erros de discretização, a sua redução pode ser obtida, por exemplo, ao utilizar esquemas de interpolação numérica de alta ordem, os quais geralmente apresentam problemas de convergência, implementação e ainda oscilações numéricas ou utilizar um processo de pós-processamento, por exemplo a extrapolação de Richardson (ER).

Entre os métodos multigrid há os chamados geométricos e algébricos. O primeiro geralmente é utilizado para problemas com malhas estruturadas e o segundo para malhas não estruturadas onde o conceito de hierarquia de malhas é puramente matemático.

O método MultiGrid de Correções Aditivas (MGCA) (KELLER, 2007) pode ser caracterizado como um método algébrico, pois depende apenas da matriz dos coeficientes mas é muito mais simples de entender e programar que os demais métodos multigrid algébricos (MORO; MARCHI, 2017).

Uma vez que o MGCA for programado, no caso para volumes finitos, pode ser aplicado a um sistema linear resultante da discretização do problema com o número de diagonais utilizado, por exemplo no caso 2D foi implementado um MGCA para cinco diagonais e foi utilizado para todos os problemas 2D em volumes finitos e no caso 3D para sete diagonais e utilizado para todos os problemas 3D em volumes finitos.

## 2.4 REDUÇÃO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Para a redução do erro de discretização há diversas formas: refinar a malha utilizada, utilizar aproximações de maior ordem de acurácia ou ainda pode-se aplicar um pós-processamento chamado extrapolação de Richardson.



O refino de malha implica em aumento do tamanho do problema, aumentando também a demanda de memória para armazenar a solução, matrizes e vetores associados e também está ligado a um aumento no tempo computacional consumido ao longo da simulação, estas demandas utilizadas pelo programa dá-se o nome de custo computacional.

Ao utilizar aproximações de maior ordem de acurácia, para uma mesma malha é possível obter erros de discretização menores, aliando isto a um custo computacional semelhante.

O problema surge ao utilizar estas aproximações para termos advectivos, ou seja, termos de transporte da variável analisada, isto torna a convergência do problema onerosa ou até não possível, a não ser que se aplique aproximações de menor ordem de acurácia, reduzindo a ordem da aproximação global do problema.

O pós-processamento chamado extrapolação de Richardson apresenta custo computacional reduzido e pode ser aplicado em diversos casos.

### 2.4.1 Extrapolação de Richardson

A extrapolação de Richardson pode ser aplicada se uma solução numérica apresenta erros de forma previsível, por exemplo como os termos do erro dependentes de  $h$  presentes na Eq. (2.2).

Conforme o valor de  $h$  for reduzindo os termos do erro irão se comportar de forma exponencial. Se isto ocorre, pode-se realizar uma extrapolação tal que seja possível aproximar o termo do erro de menor ordem, ou o termo da ordem assintótica da aproximação e obter assim uma solução de maior acurácia (MARCHI, 2001).

Admite-se portanto que existe uma solução numérica  $\phi_\infty$  a qual não possui o termo de ordem assintótica do erro de discretização. Aplicando-se essa metodologia entre 2 malhas, sendo o índice 2 a malha fina ( $h_2 = h$ ) e 1 a malha grossa ( $h_1 = rh$ ) e onde  $r$  é a razão de refino de malha e é definida por  $r = \frac{h_1}{h_2}$ , obtém-se,

$$\begin{cases} \phi_\infty - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} \\ \phi_\infty - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\phi_\infty = \phi_2 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{r^{p_0} - 1} \quad (2.15)$$

Uma dedução do comportamento teórico de ER para uma aproximação isolada é mostrada no apêndice D onde analisa-se que ER cria uma aproximação de maior ordem de acurácia a partir das aproximações utilizadas.

O termo à direita da Eq. (2.15) também é denominado correção de Richardson (DAHLQUIST; BJORCK, 2008) ou ainda estimador de Richardson baseado na ordem assintótica.

### 2.4.2 Múltiplas extrapolações de Richardson

Ao aplicar ER uma única vez obtém-se uma aproximação numérica de maior ordem de acurácia, a ideia de aplicá-lo sucessivamente é a redução posterior dos termos do erro.

O procedimento sucessivo de ER é denominado múltiplas extrapolações de Richardson (MER) e pode ser aplicado utilizando-se três ou mais soluções numéricas (MARCHI *et al.*, 2009; MARCHI *et al.*, 2013; MORO; MARCHI, 2016).

A equação geral para a aplicação de MER é dada por,

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1} \quad (2.16)$$

onde  $r$  é uma razão de refino constante,  $g - 1$  é a malha grossa e  $g$  é a malha fina avaliada;  $m$  é o nível de extrapolação,  $g$  é a malha da extrapolação,  $p_{m-1}$  é a ordem verdadeira de acurácia no nível  $m - 1$  e  $r$  é a razão de refino.

Analisando a Eq. (2.16), tem-se  $m = 1$  o primeiro nível de extrapolação, até o nível de extrapolação  $m = g - 1$  onde  $g = 1, \dots, G$  sendo  $G$  o número total de malhas utilizadas no MER.

Como exemplo, está mostrado na Tab. 2.1 o campo de soluções obtida aplicando-se MER (usando a Eq. (2.16)) para um problema com  $G = 9$ .

Tabela 2.1 – Exemplo de níveis de soluções obtidas aplicando-se MER.

	m								
g	$\phi_{1,0}$								
	$\phi_{2,0}$	$\phi_{2,1}$							
	$\phi_{3,0}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{3,2}$						
	$\phi_{4,0}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{4,2}$	$\phi_{4,3}$					
	$\phi_{5,0}$	$\phi_{5,1}$	$\phi_{5,2}$	$\phi_{5,3}$	$\phi_{5,4}$				
	$\phi_{6,0}$	$\phi_{6,1}$	$\phi_{6,2}$	$\phi_{6,3}$	$\phi_{6,4}$	$\phi_{6,5}$			
	$\phi_{7,0}$	$\phi_{7,1}$	$\phi_{7,2}$	$\phi_{7,3}$	$\phi_{7,4}$	$\phi_{7,5}$	$\phi_{7,6}$		
	$\phi_{8,0}$	$\phi_{8,1}$	$\phi_{8,2}$	$\phi_{8,3}$	$\phi_{8,4}$	$\phi_{8,5}$	$\phi_{8,6}$	$\phi_{8,7}$	
	$\phi_{9,0}$	$\phi_{9,1}$	$\phi_{9,2}$	$\phi_{9,3}$	$\phi_{9,4}$	$\phi_{9,5}$	$\phi_{9,6}$	$\phi_{9,7}$	$\phi_{9,8}$

A análise dos resultados obtidos com a Tab. 2.1 é a seguinte: para cada nível de extrapolação (colunas da tabela) é obtida a solução para as malhas  $g = m + 1, \dots, G$  com ordem de acurácia seguindo a progressão aritmética dada pelos expoentes dos termos do erro da aproximação utilizada.

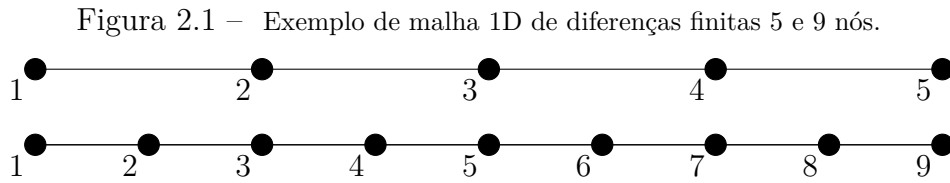
Por exemplo, se for uma aproximação isolada CDS-2 como mostrado na Eq. (2.2), as ordens de acurácia obtidas seriam 2, 4, 6, ..., 18. A solução mais acurada em cada malha é dada pelos valores da diagonal principal da matriz apresentada na Tab. 2.1.

A ER é utilizada para reduzir o erro de discretização em variáveis globais ou pontuais, no entanto, se o interesse é a redução do erro de discretização ao longo de todo o campo de soluções pode-se utilizar outro procedimento.

### 2.4.3 Extrapolação de Richardson completa

Segundo Roache e Knupp (1993), a extrapolação de Richardson completa (CRE) é uma utilização da extrapolação de Richardson em todos os pontos do domínio discreto e é dita completa quando a solução obtida com esse pós-processamento é de alta ordem de acurácia em todos os pontos do domínio da malha fina.

No caso ao utilizar uma malha de diferenças finitas que será abordada na próxima seção, dependendo das malhas utilizadas ao aplicar CRE poderá haver pontos coincidentes e também pontos não coincidentes entre essas malhas. Em um exemplo unidimensional, tem-se duas malhas: uma com 5 nós (malha 1) e outra com 9 nós (malha 2), apresentados na Fig. 2.1.



O objetivo de CRE portanto é obter uma correção para todos os pontos da malha 2 a fim de aumentar a ordem de acurácia da solução. Para isso usam-se os pontos coincidentes entre as malhas 1 e 2 (no caso da malha 2: 1, 3, 5, 7 e 9) para obter um campo de correções através de,

$$C_{\infty} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{r^{p_0} - 1} \quad (2.17)$$

Como há pontos não coincidentes, os seus valores são interpolados (caso da malha 2: 2, 4, 6 e 8). Esta interpolação deve ser escolhida para manter a ordem do esquema de aproximação numérica utilizado.

A escolha de interpolação adotada por Roache e Knupp (1993) foi a linear: se o ponto não coincidente estiver entre nós coincidentes na direção x e na direção y é aplicada uma interpolação linear usando os coincidentes, se o ponto não coincidente estiver entre quatro pontos coincidentes é feito então uma interpolação bilinear para este nó.

Portanto o algoritmo para a aplicação de CRE 2D se torna:

1. Obter a solução numérica em duas malhas distintas com refino  $r$ , sendo a malha 1 e 2 as malhas grossa e fina, respectivamente.
2. Para os nós coincidentes entre as malhas, obter a correção de Richardson dada pela Eq. (2.17) e obter portanto o valor de  $C_\infty$ .
3. Para os nós não coincidentes, aplicar um dos três casos de interpolação linear: entre dois nós consecutivos em  $x$ , interpolação linear na direção  $x$ ; entre dois nós consecutivos em  $y$ , interpolação linear na direção  $y$ , entre quatro nós não coincidentes, interpolação bilinear.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha fina  $\phi_\infty = \phi_2 + C_\infty$

## 2.5 INTERPOLAÇÃO POR DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE NEWTON

Diferente do método CRE de Roache e Knupp (1993), foi analisado no presente trabalho que o grau de interpolação utilizado entre malhas consecutivas é proporcional à ordem de acurácia máxima obtida ao final das extrapolações.

Foi utilizado portanto um grau de interpolação de 15 via polinômios das diferenças divididas de Newton (CHAPRA; CANALE, 2015).

O polinômio de grau  $n$  usando a forma geral dos polinômios de Newton é dado por,

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (2.18)$$

onde  $x$  é a posição de interesse e  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  são as posições dos pontos conhecidos utilizados.

Os coeficientes das diferenças divididas  $b_0, b_1, \dots, b_n$  são calculados usando os  $n + 1$  pontos conhecidos, como segue,

$$\begin{aligned} b_0 &= f(x_0) \\ b_1 &= f[x_1, x_0] \\ b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\ &\dots \\ b_n &= f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $f(x_0)$  é o valor conhecido utilizado para a interpolação na posição  $x_0$  e idem até  $f(x_n)$ .

As funções representadas na Eq. (2.19) são dadas por,

$$\begin{aligned}
 f[x_i, x_j] &= \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \\
 f[x_i, x_j, x_k] &= \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \\
 &\vdots \\
 f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] &= \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Este procedimento de interpolação fez-se necessário pois há necessidade de casos especiais próximos aos contornos do problema e em algumas situações o número de pontos é inferior ao mínimo para o grau de interpolação 15, portanto o máximo possível para os pontos disponíveis foi utilizado.

Para aplicar estes procedimentos de extrapolação é necessário obter primeiramente a solução do problema, geralmente oriundo de equações diferenciais.

## 2.6 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Para a maioria dos casos de engenharia, as equações diferenciais que modelam o fenômeno físico não possuem resolução analítica conhecida, nestes casos é necessário uma abordagem numérica para a sua resolução (FILHO, 2005).

O primeiro passo é a discretização do domínio de cálculo, processo que compreende a obtenção de pontos finitos nos quais o resultado da equação diferencial será calculado o qual compreenderá uma malha de pontos. Após a discretização, o método numérico deverá ser aplicado nas equações diferenciais, originando equações algébricas que envolvem a incógnita do problema (MARCHI, 2001).

Nesta tese, duas formas de discretização serão utilizadas: o método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos. Por isto são apresentados a seguir resumidamente os dois métodos.

### 2.6.1 Método das diferenças finitas

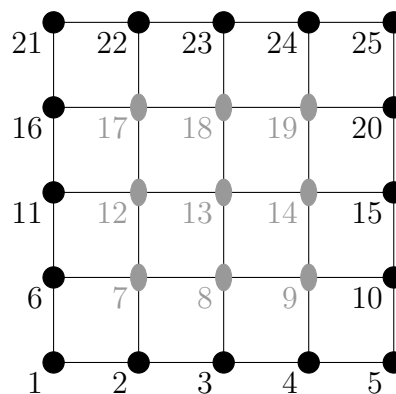
O método das diferenças finitas (MDF) consiste em substituir diretamente nas derivadas da equação diferencial as aproximações numéricas, as quais envolvem os valores nodais da função incógnita (FERZIGER; PERIĆ, 2002).

Ao substituir as aproximações na equação diferencial obtém-se uma equação algébrica para cada ponto da malha computacional, equação esta que envolve seus nós vizinhos.

As aproximações numéricas podem ser obtidas, por exemplo, considerando expansões em série de Taylor (KREYSZIG, 1999). Uma destas aproximações é chamada *Central Differencing Scheme* (CDS) (BURDEN; FAIRES, 2008) já apresentada na Eq. (2.2).

A aproximação CDS possui ordem de acurácia 2, ou seja, o termo de menor ordem do erro de truncamento desta aproximação é o termo com  $h^2$ , ou seja, ordem assintótica de 2. Uma malha 2D de  $5^2$  nós de diferenças finitas é apresentada na Fig. 2.2.

Figura 2.2 – Exemplo de malha 2D de diferenças finitas com  $5^2$  nós.



Na Fig. 2.2 os nós circulares são os nós coincidentes com as fronteiras do domínio e as elipses representam os nós internos ao domínio.

## 2.6.2 Método dos volumes finitos

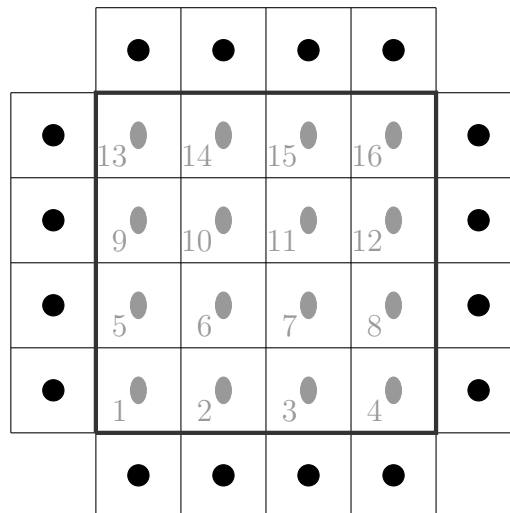
Já o método de volumes finitos apresenta uma característica bem diferente: a integração da equação diferencial, na forma conservativa, sobre um volume de controle genérico (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2010) e é neste volume de controle que as equações serão integradas. No entanto, via teorema das médias, as variáveis de interesse são armazenadas no centro geométrico do volume de controle.

As derivadas, integrais ou ainda a própria variável incógnita deverão ser aproximadas, por exemplo, usando uma aproximação numérica baseada na série de Taylor, exatamente como abordado via diferenças finitas.

A diferença prática entre os dois métodos de discretização está portanto na forma da malha e na aproximação das derivadas, integrais e a variável incógnita, além da forma de aplicação das condições de contorno.

É apresentada na Fig. 2.6.2 a mesma representação da malha de diferenças finitas de  $5^2$  nós, só que para volumes finitos, ou seja serão  $4^2$  volumes de controle reais dados pelas elipses e considerando como aplicação das condições de contorno o método de volumes fictícios, apresentados fora do domínio real com pontos.

Figura 2.3 – Exemplo de malha 2D de volumes finitos com 4x4 volumes de controle reais.



Uma vez geradas as equações algébricas é necessário algum método para resolvê-las, geralmente o sistema de equações gerado é linearizado ou já era linear e também esparso, ou seja, há apenas algumas diagonais não nulas na matriz dos coeficientes.

Obter um método de resolução de sistemas lineares que utilize a característica de esparsidade para reduzir custos computacionais é de interesse ao utilizar estes tipos de métodos numéricos.

## 2.7 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES RESULTANTE DO PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO

Na literatura há várias formas de resolução do sistema de equações resultantes, por exemplo, da discretização via diferenças finitas ou volumes finitos. O método *multigrid* geralmente é utilizado com Gauss-Seidel pelos motivos citados na seção 2.3.1, mas neste trabalho foram utilizados mais solvers, como são chamados esses tipos de método.

Em problemas 1D de diferenças finitas e volumes finitos existe um método amplamente utilizado que é chamado *TriDiagonal Matrix Algorithm* (THOMAS, 1949; PATANKAR, 1980) (TDMA), o qual é uma dedução simplificada da decomposição LU que realiza operações matemáticas apenas com as três diagonais não nulas existentes nesses tipos de sistemas de equações (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Em problemas 2D por sua vez, geralmente a matriz de equações gerada é pelo menos pentadiagonal, ou seja, possui cinco diagonais não nulas na matriz dos coeficientes do sistema linear e o sistema é esparso. Portanto um solver amplamente utilizado é o chamado Alternating Direction Implicit (ADI) (PEACEMAN; RACHFORD, 1955), o qual

é o uso do método TDMA implícito em uma direção e explícito noutra e vice versa de forma alternada.

Há outros solvers que também foram utilizados neste estudo, como o Gauss-Seidel, o Jacobi e o método *Modified Strongly Implicit* (MSI) (SCHNEIDER; ZEDAN, 1981). O método MSI baseia-se em uma decomposição LU incompleta e um sistema iterativo para a correção, isto que o torna mais implícito, ou seja, mais próximo de um solver direto, do que os outros sistemas iterativos citados.

O autor desta tese propôs um novo solver chamado *PentaDiagonal Matrix Algorithm* (PDMA) (MORO *et al.*, 2015) baseado em um acoplamento do método TDMA em ambas as direções coordenadas (x e y) e analisou que o PDMA se aproxima de uma espécie de média entre o comportamento do método multigrid e os demais solvers testados (Gauss-Seidel, ADI, MSI). O comportamento empírico do tempo de CPU de um código de CFD dependendo do tamanho do problema  $n$ , pode ser representado por,

$$t_{CPU} = kn^p \quad (2.21)$$

onde  $k$  e  $p$  são constantes ajustadas via resultados obtidos, representam o coeficiente linear e o expoente respectivamente.

Foi observado (MORO *et al.*, 2015) que os solvers Gauss-Seidel, ADI e MSI possuem valor do expoente  $p$  que tendem a 2, o método multigrid deve apresentar um valor teórico de 1 (SANTIAGO, 2010) e o método PDMA tendeu a um valor intermediário próximo de 1,5.

Nesta tese foram utilizados os solvers citados, além disso foram feitas novas deduções do PDMA e o HDMA utilizado no trabalho de Moro e Marchi (2016) o qual é uma extensão 3D do método PDMA (acoplamento de deduções do TDMA nas três direções coordenadas, x, y e z). Estas deduções e otimização estão presentes no apêndice C.

## 2.8 CONSIDERAÇÕES

A contribuição do presente trabalho se dá na melhoria de estimativas iniciais além do disponível na literatura e também no aumento da ordem de acurácia em diversos problemas de interesse na área de dinâmica dos fluidos computacional.

Por este motivo selecionou-se alguns problemas que modelam escoamento de fluidos e transferência de calor tanto bidimensional quanto tridimensional. Cada um destes problemas são compostos de uma ou duas equações diferenciais que são resolvidas utilizando tanto método das diferenças finitas quanto de volumes finitos.



## 3 METODOLOGIA

Neste capítulo da tese agrupa-se a metodologia empregada: os modelos matemáticos e numéricos, obtidos via método das diferenças finitas e volumes finitos, a forma de interpolação aplicada em cada um dos dois casos, formas de redução dos erros de discretização e iteração e demais dados.

### 3.1 MODELOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS

Foram selecionados 7 problemas de interesse da área de dinâmica dos fluidos computacional e transferência de calor computacional para a análise da redução do erro de iteração e discretização, representados por 6 equações: Laplace 2D, 2 problemas de Advecção-Difusão 2D, Burgers 2D, Navier-Stokes 2D, Laplace 3D e Poisson 3D. Será apresentado ao longo desta seção seus respectivos modelos matemáticos e numéricos.

Estes problemas são de especial interesse para a Transferência de Calor Computacional e Dinâmica dos Fluidos Computacional pois representam: condução de calor (Laplace 2D, Laplace 3D e Poisson 3D), convecção (Advecção-Difusão 2D) e escoamento de fluidos newtonianos (Burgers 2D e Navier-Stokes 2D).

Como serão vários problemas com similaridades entre eles, definiu-se um modelo numérico geral e para cada problema, se necessário, é citado demais informações.

#### 3.1.1 Modelo numérico geral

O modelo numérico geral usado nos modelos matemáticos dos problemas de interesse é dado por:

- Método numérico, dado tanto por diferenças finitas quanto por volumes finitos.
- Aproximações de segunda ordem de acurácia para todos os termos da equação diferencial.
- Condições de contorno de diferenças finitas: aplica o valor conhecido diretamente no contorno.
- Condições de contorno de volumes finitos: utiliza-se o método dos volumes fictícios.
- Estimativa inicial do campo de  $\Phi$ : varia com o método utilizado dado na seção 3.4.
- Critério de parada do sistema iterativo: dado pela metodologia da seção 3.5.

### 3.1.2 Problema 1: Laplace 2D

O problema de Laplace 2D é definido pela Eq. (3.1) e surge ao fazer as seguintes hipóteses na equação da conservação da energia térmica (INCROPERA; DEWITT, 2003):

- Problema bidimensional
- Regime permanente
- Coordenadas cartesianas
- Propriedades físicas constantes
- Ausência da taxa de geração interna de calor
- O calor se propaga apenas por difusão

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

A Eq. (3.1) pode modelar, por exemplo, a condução de calor no interior de um sólido. Não perdendo a generalidade, pode simular até problemas de escoamento potencial. Para esse problema as condições de contorno do domínio retangular unitário são dadas por,

$$\begin{aligned} T(0, y) = T(1, y) = T(x, 0) = 0 \\ T(x, 1) = \text{sen}(\pi x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

É possível obter, a partir das condições de contorno dadas pela Eq. (3.2) a solução analítica é (MALISKA, 2010):  $T(x, y) = \text{sen}(\pi x) \frac{\text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)}$  [K].

As variáveis analisadas são parecidas com o trabalho de Alves (2010): (1)  $T$  no domínio de cálculo, (2) Temperatura central do domínio (a qual é obtida diretamente em diferenças finitas e interpolado linearmente para volumes finitos), (3) Temperatura média do domínio dada pela Eq. (3.3) e (4) Taxa de transferência de calor no contorno leste do domínio dada pela Eq. (3.4).

$$\begin{aligned} t \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x, y, z) \, dx \, dy \\ \bar{T} = t \int_0^1 \int_0^1 T(x, y) \, dx \, dy \\ \bar{T} = t \frac{2 \cosh(\pi) - 2}{\text{senh}(\pi) \pi^2} [K] \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que  $t$  é a espessura do domínio na direção coordenada  $z$ , uma vez que nesta direção a solução é constante,  $L_x$  e  $L_y$  são os comprimentos do domínio de cálculo na direção  $x$  e  $y$ , unitários.

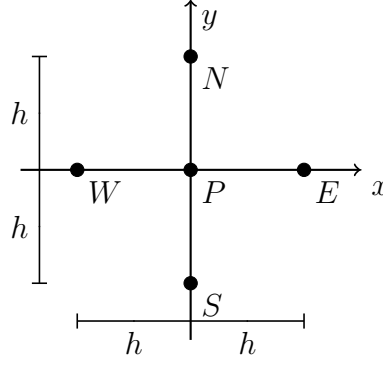
$$Q_e = -\kappa t \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} dy \quad (3.4)$$

$$Q_e = \kappa t \frac{\cosh(\pi) - 1}{\sinh(\pi)} [W]$$

onde  $\kappa$  é a condutividade térmica do material  $[W/mK]$ .

Para a malha genérica de diferenças finitas dada pela Fig. 3.1, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.5).

Figura 3.1 – Malha 2D genérica de diferenças finitas com espaçamento  $h$ .



$$\frac{T_E + T_W - 2 T_P}{h^2} + \frac{T_N + T_S - 2 T_P}{h^2} = 0 \quad (3.5)$$

$$4T_P = T_S + T_W + T_E + T_N$$

Portanto deixando a Eq. (3.5) na forma de equação geral do sistema linear pentadiagonal dado pela Eq. (3.6) obtêm-se os coeficientes e termos fontes dados pela Eq. (3.7).

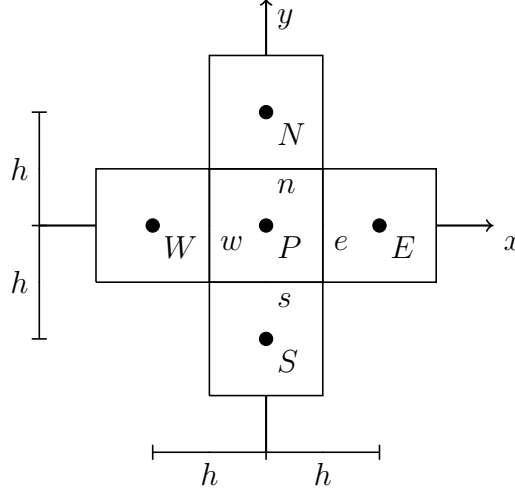
$$a_P T_P = a_S T_S + a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + b_P \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} a_S &= 1 \\ a_W &= 1 \\ a_P &= 4 \\ a_E &= 1 \\ a_N &= 1 \\ b_P &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde os termos  $a_X$  são coeficientes, sendo  $X$  referente a  $S$ ,  $W$ ,  $P$ ,  $E$  ou  $N$  e  $b_P$  é o termo fonte.

Já para a malha genérica de volumes finitos dada pela Fig. 3.2, o modelo numérico é dado pela Eq. (3.8).

Figura 3.2 – Malha 2D genérica de volumes finitos com espaçamento  $h$ .



$$\begin{aligned}
 \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy &= 0 \\
 \int_s^n \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_w \right] dy + \int_w^e \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_s \right] dx &= 0 \\
 \left[ \frac{\Phi_E - \Phi_P}{h} - \frac{\Phi_P - \Phi_W}{h} \right] h + \left[ \frac{\Phi_N - \Phi_P}{h} - \frac{\Phi_P - \Phi_S}{h} \right] h &= 0 \\
 \Phi_E - \Phi_P - \Phi_P + \Phi_W + \Phi_N - \Phi_P - \Phi_P + \Phi_S &= 0 \\
 4\Phi_P &= \Phi_E + \Phi_W + \Phi_N + \Phi_S
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto deixando a Eq. (3.8) na forma de equação geral do sistema linear pentadiagonal dado pela Eq. (3.6) obtêm-se os coeficientes e termos fontes idênticos aos dados pela Eq. (3.7).

### 3.1.3 Problema 2: Advecção-Difusão 2D

O problema de Advecção-Difusão 2D é definido pela Eq. (3.9) e surge ao fazer as seguintes hipóteses na equação da conservação da energia térmica (SCHNEIDER, 2007):

- Problema bidimensional

- Regime permanente
- Coordenadas cartesianas
- Propriedades físicas constantes
- O calor se propaga por difusão e advecção da propriedade ao longo do escoamento

$$\frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{\partial (vT)}{\partial y} = S^\phi + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.9)$$

$$S^\phi = \pi \frac{e^{vy} - 1}{e^v - 1} \frac{(\pi \operatorname{sen}(\pi x) - u \cos(\pi x))(e^{ux} - 1) - 2u \cos(\pi x)}{e^u - 1}$$

Para este problema as condições de contorno do domínio retangular unitário são dadas por,

$$T(0, y) = T(1, y) = T(x, 0) = 0 \quad (3.10)$$

$$T(x, 1) = \operatorname{sen}(\pi x) \frac{e^{ux} - 1}{e^u - 1}$$

Desta forma a solução analítica fabricada é obtida na forma:  $T(x, y) = \operatorname{sen}(\pi x) \frac{e^{ux} - 1}{e^u - 1} \times \frac{e^{vy} - 1}{e^v - 1} [K]$ , sendo utilizado para ambos campos de escoamento (as variáveis  $u$  e  $v$ ) o valor constante de 2 em cada direção.

A metodologia utilizada para fabricar um solução analítica é chamada método das soluções fabricadas (KNUPP; SALARI, 2003). Neste método uma solução analítica é proposta e se ela não for uma solução para o problema um termo fonte é criado na equação diferencial para permiti-la.

As variáveis analisadas são: (1)  $T$  no domínio de cálculo, (2) Temperatura central do domínio (a qual é obtida diretamente em diferenças finitas e interpolado linearmente para volumes finitos) e a (3) Temperatura média do domínio dado pela Eq. 3.11.

$$\bar{T} = t \frac{(\pi^2 e^u - \pi^2 - 2u^2)(e^v - v - 1)}{\pi(e^u - 1)v(u^2 + \pi^2)(e^v - 1)} [K] \quad (3.11)$$

Para a malha genérica de diferenças finitas dada pela Fig. 3.1, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.12).

$$\frac{T_E + T_W - 2T_P}{h^2} + \frac{T_N + T_S - 2T_P}{h^2} + S_P^T = u \frac{T_E - T_W}{2h} + v \frac{T_N - T_S}{2h} \quad (3.12)$$

Portanto deixando a Eq. (3.12) na forma de equação geral do sistema linear pentadiagonal dado pela Eq. (3.6) obtêm-se os coeficientes e termos fontes dados pela Eq. (3.13).

$$\begin{aligned}
 a_S &= 2 + v h \\
 a_W &= 2 + u h \\
 a_P &= 8 \\
 a_E &= 2 - u h \\
 a_N &= 2 - v h \\
 b_P &= 2h^2 S_P^\phi
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Já para a malha genérica de volumes finitos dada pela Fig. 3.2, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.14).

$$\begin{aligned}
 \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + S^T \right] dx dy &= \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{\partial (vT)}{\partial y} \right] dx dy \\
 \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s \right] h + S_P^T h^2 &= u (T_e - T_w) h + v (T_n - T_s) h \\
 T_S + T_W + T_E + T_N - 4T_P + S_P^T h^2 &= \\
 u h \left[ \frac{T_E + T_P}{2} - \frac{T_P + T_W}{2} \right] + v h \left[ \frac{T_N + T_P}{2} - \frac{T_P + T_S}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto deixando a Eq. (3.14) na forma de equação geral do sistema linear pentadiagonal dado pela Eq. (3.6) obtêm-se os coeficientes e termos fontes idênticos aos dados pela Eq. (3.13).

### 3.1.4 Problema 2.1: Advecção-Difusão 2D Modificado

O problema é o mesmo da seção anterior, entretanto para uma análise deste problema sem o termo fonte definido por  $S^\phi$  na Eq. (3.9). Assim as condições de contorno no domínio retangular unitário são dadas por,

$$\begin{aligned}
 T(0, y) &= T(x, 0) = 0 \\
 T(x, 1) &= \frac{e^{ux} - 1}{e^u - 1} \\
 T(1, y) &= \frac{e^{vy} - 1}{e^v - 1}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Desta forma obtêm-se a seguinte solução analítica:  $T(x, y) = \frac{e^{ux} - 1}{e^u - 1} \frac{e^{vy} - 1}{e^v - 1} [K]$ , novamente foi utilizado o valor de 2 de campo de velocidade constante em cada direção.

As variáveis analisadas são: (1)  $T$  no domínio de cálculo, (2) Temperatura central do domínio (a qual é obtida diretamente em diferenças finitas e interpolado linearmente para volumes finitos) e a (3) Temperatura média do domínio dada pela Eq. 3.16.

$$\bar{T} = t \frac{(e^u - u - 1)(e^v - v - 1)}{u v (e^u - 1)(e^v - 1)} [K] \quad (3.16)$$

Os coeficientes e termos fontes do sistema linear serão também dados pela Eq. (3.13) com  $S_P^\phi = 0$ .

### 3.1.5 Problema 3: Burgers 2D

O problema de Burgers 2D (BASTO *et al.*, 2009) é definido pelo sistema de equações da Eq. (3.17) e surge ao fazer as seguintes hipóteses na equação da conservação da quantidade de movimento linear:

- Problema bidimensional
- Regime permanente
- Fluido incompressível
- Campo de pressões conhecido

$$\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} = S^\phi + \Gamma \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (3.17)$$

onde  $\Phi$  pode ser duas variáveis  $u$  e  $v$ ,  $\Gamma$  e  $S^\phi$  são obtidos da Tab. 3.1, notando que as variáveis não são adimensionais, tem a unidade de velocidade (m/s).

Tabela 3.1 – Valores de  $\Phi$  para obter o sistema de equações da Eq. de Burgers 2D

Equação	$\Phi$	$\Gamma$	$S^\phi$
QMLx	$u$	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
QMLy	$v$	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial y} - S_{Shih}$

onde  $Re$  é o número de Reynolds do escoamento analisado (FOX *et al.*, 2006) unitário neste trabalho, se  $S_{Shih}$  for não nulo, será resolvido o problema de Burgers 2D, o qual possui solução analítica fabricada cujo campo de pressões e soluções são obtidas do trabalho de Shih *et al.* (1989).

Para este problema as condições de contorno para o domínio retangular unitário são dadas pela Eq. (3.18) e portanto a solução analítica é dada pela Eq. (3.19).

$$\begin{aligned}
 u(0, y) &= u(1, y) = u(x, 0) = 0 \\
 u(x, 1) &= 16(x^4 - 2x^3 + x^2) \\
 v(0, y) &= v(1, y) = v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \\
 p(x, y, Re) &= 64\left(\frac{1}{2}x^8 - 2x^7 + 3x^6 - 2x^5 + \frac{1}{2}x^4\right) \times \\
 &\quad ((y^4 - y^2)(12y^2 - 2) - (4y^3 - 2y)^2) \\
 &\quad + \frac{192(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3)y + 8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(4y^3 - 2y)}{Re} [Pa]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= (x^4 - 2x^3 + x^2)(32y^3 - 16y)[m/s] \\
 v(x, y) &= (-32x^3 + 48x^2 - 16x)(y^4 - y^2)[m/s]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

As variáveis analisadas são: (1) Velocidades  $u$  e  $v$  no domínio de cálculo, (2) Velocidade  $u$  e  $v$  no centro do domínio (a qual é obtida diretamente em diferenças finitas e interpolado linearmente para volumes finitos) e (3) Fluxo de massa através da linha de centro até o meio do domínio, dado pela Eq. (3.20).

$$\dot{m} = t \rho \int_0^{\frac{1}{2}} v|_{y=\frac{1}{2}} dx \tag{3.20}$$

$$\dot{m} = t \rho \frac{3}{32} [kg/s]$$

onde  $\rho$  [kg/s] é a massa específica do meio, pode ser relacionado com o número de Reynolds, uma vez que o domínio é unitário e a máxima velocidade é unitária também, portanto:  $Re = \rho u L / \mu = \rho / \mu$ , portanto,  $\rho = \mu Re$  e  $\mu$  [Pa.s] é a viscosidade dinâmica do meio, lembrando que o número de Reynolds utilizado é unitário.

Para a malha genérica de diferenças finitas dada pela Fig. 3.1, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.21).

$$\frac{(u\Phi)_E - (u\Phi)_W}{2h} + \frac{(v\Phi)_N - (v\Phi)_S}{2h} = S_P^\phi + \Gamma \left( \frac{\Phi_E + \Phi_W - 2\Phi_P}{h^2} + \frac{\Phi_N + \Phi_S - 2\Phi_P}{h^2} \right)$$

$$h(u\Phi)_E - h(u\Phi)_W + h(v\Phi)_N - h(v\Phi)_S = 2S_P^\phi h^2 + 2\Gamma(\Phi_E + \Phi_W + \Phi_N + \Phi_S - 4\Phi_P)$$

$$8\Gamma\Phi_P = (2\Gamma + v_S h)\Phi_S + (2\Gamma + u_W h)\Phi_W + (2\Gamma - u_E h)\Phi_E + (2\Gamma - v_N h)\Phi_N + 2S_P^\phi h^2 \tag{3.21}$$

Portanto deixando a Eq. (3.21) na forma de equação geral do sistema linear pentadiagonal dado pela Eq. (3.6) obtêm-se os coeficientes e termos fontes dados pela Eq.



(3.22).

$$\begin{aligned}
a_S &= 2\Gamma + v_S h \\
a_W &= 2\Gamma + u_W h \\
a_P &= 8\Gamma \\
a_E &= 2\Gamma - u_E h \\
a_N &= 2\Gamma - v_N h \\
b_P &= 2S_P^\Phi h^2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Já para a malha genérica de volumes finitos dada pela Fig. 3.2, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.23).

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} \right] dx dy &= \int_s^n \int_w^e \left[ S^\phi + \Gamma \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \\
h(u\Phi|_e - u\Phi|_w + v\Phi|_n - v\Phi|_s) &= S_P^\phi h^2 + \Gamma h \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_w + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_s \right) \\
h \left( \frac{u_P + u_E}{2} \frac{\Phi_P + \Phi_E}{2} - \frac{u_W + u_P}{2} \frac{\Phi_W + \Phi_P}{2} + \frac{v_P + v_N}{2} \frac{\Phi_P + \Phi_N}{2} - \frac{v_W + v_P}{2} \frac{\Phi_W + \Phi_P}{2} \right) &= \\
S_P^\phi h^2 + h \Gamma \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{h} - \frac{\Phi_P - \Phi_W}{h} + \frac{\Phi_N - \Phi_P}{h} - \frac{\Phi_P - \Phi_S}{h} \right) &
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto deixando a Eq. (3.23) na forma de equação geral do sistema linear pentadiagonal dado pela Eq. (3.6) obtêm-se os coeficientes e termos fontes idênticos aos dados pela Eq. (3.22).

### 3.1.6 Problema 4: Navier-Stokes 2D

O problema de Navier-Stokes 2D resolvido neste trabalho, surge ao fazer as seguintes hipóteses na equação da conservação da quantidade de movimento linear e da massa:

- Problema bidimensional
- Regime permanente
- Fluido incompressível

Neste caso a mesma Eq. (3.17) é utilizada, no entanto serão três equações a três incógnitas (pelo fato da pressão não ser conhecida), dadas pela Tab. 3.2.

Se forem aplicadas as mesmas condições de contorno do problema de Burgers 2D resulta-se na mesma solução analítica.

Tabela 3.2 – Valores de  $\Phi$  para obter o sistema de equações da Eq. de Navier-Stokes 2D

Equação	$\Phi$	$\Gamma$	$S^\phi$
Massa	1	0	0
QMLx	$u$	$\frac{1}{R_e}$	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
QMLy	$v$	$\frac{1}{R_e}$	$-\frac{\partial p}{\partial y} - S_{Shih}$

Para o problema da cavidade unitária com a tampa móvel, bastaria alterar a distribuição de velocidades axial ao longo da superfície  $y = 1$  da cavidade para uma velocidade constante.

Para a resolução das equações de Navier-Stokes 2D foi utilizado neste trabalho a formulação função corrente e vorticidade (FROMM, 1964).

A formulação função corrente vorticidade é válida para problemas com propriedades constantes, escoamento incompressível bidimensional, ou seja, o problema resolvido neste trabalho. O objetivo principal de utilizá-la, é para simplificar o número de equações e de incógnitas do problema.

A função corrente é definida pelas velocidades:  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  e  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  e a vorticidade é definida por:  $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ .

Desta forma as três equações dadas pela Tab. 3.2 na Eq. (3.17) são reduzidas a duas e são dadas pela Eq. (3.24).

$$\begin{array}{ll}
 \text{Equação} & \text{Expressão} \\
 \omega & \Gamma \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + S^\omega \\
 \psi & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega + S^\psi
 \end{array} \tag{3.24}$$

onde  $S^\psi = 0$  e  $S^\omega$  é dado por,

$$\begin{aligned}
 S^\omega = & -192 \left[ (y^4 - y^2) + (x^2 - x + \frac{1}{6})(12y^2 - 2) + (x^4 - 2x^3 + x^2) \right] \\
 & -256Re[-(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) [(6x - 3)(y^4 - y^2) + (2x^3 - 3x^2 + x)(6y^2 - 1)] \\
 & + 6(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) [(x^2 - x + \frac{1}{6})(2y^3 - y) + (x^4 - 2x^3 + x^2)y]]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para a malha genérica de diferenças finitas dada pela Fig. 3.1, o modelo numérico

para este problema é dado pela Eq. (3.26).

Equação	Expressão	
$\omega$	$\Gamma \left( \frac{\omega_E + \omega_W - 2\omega_P}{h^2} + \frac{\omega_N + \omega_S - 2\omega_P}{h^2} \right) =$ $u_P \frac{\omega_E - \omega_W}{2h} + v_P \frac{\omega_N - \omega_S}{2h} + S_P^\omega$	(3.26)
$\psi$	$\frac{\psi_E + \psi_W - 2\psi_P}{h^2} + \frac{\psi_N + \psi_S - 2\psi_P}{h^2} = -\omega_P + S_P^\psi$	

Portanto deixando a Eq. (3.26) na forma de equação geral do sistema linear pentadiagonal dado pela Eq. (3.6) obtêm-se os coeficientes e termos fontes dados pela Eq. (3.27).

Variável	$\omega$	$\Psi$	
$a_S$	$2\Gamma + v_P h$	1	
$a_W$	$2\Gamma + u_P h$	1	
$a_P$	$8\Gamma$	4	
$a_E$	$2\Gamma - u_P h$	1	
$a_N$	$2\Gamma - v_P h$	1	
$b_P$	$-2h^2 S_P^\omega$	$h^2 (\omega_P - S_P^\psi)$	(3.27)

Na Eq. 3.27, as variáveis  $u_P$  e  $v_P$  são dadas pela Eq. (3.28).

$$u_P = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_P \approx \frac{\psi_N - \psi_S}{2h}$$

$$v_P = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_P \approx \frac{\psi_E - \psi_W}{2h}$$
(3.28)

Para a malha genérica de volumes finitos dada pela Fig. 3.2, o modelo numérico para este problema é dado pelas Eqs. (3.29) e (3.30).

Equação	Expressão	
$\omega$	$\int_s^n \int_w^e \left[ \Gamma \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right] dx dy =$ $\int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + S^\omega \right] dx dy$	(3.29)
$\psi$	$\int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] dx dy = \int_s^n \int_w^e [-\omega + S^\psi] dx dy$	

Equação

Expressão

$$\begin{aligned}
\omega & \quad \Gamma \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_w + \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_s \right] h \\
& \quad - (\psi_n - \psi_s) (\omega_e - \omega_w) - (\psi_e - \psi_w) (\omega_n - \omega_s) - S_P^\omega h^2 \\
\psi & \quad 2 \Gamma \left[ \frac{\omega_E - \omega_P}{h} - \frac{\omega_P - \omega_W}{h} + \frac{\omega_N - \omega_P}{h} - \frac{\omega_P - \omega_S}{h} \right] h \\
& \quad - (\psi_N - \psi_S) (\omega_E - \omega_W) - (\psi_E - \psi_W) (\omega_N - \omega_S) - 2 S_P^\omega h^2 \\
& \quad \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_w + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_s \right] h + [\omega_P - S_P^\psi] h^2 \\
& \quad \left[ \frac{\psi_E - \psi_P}{h} - \frac{\psi_P - \psi_W}{h} + \frac{\psi_N - \psi_P}{h} - \frac{\psi_P - \psi_S}{h} \right] h + [\omega_P - S_P^\psi] h^2
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Portanto deixando a Eq. (3.30) na forma de equação geral do sistema linear pentadiagonal dado pela Eq. (3.6) obtêm-se os coeficientes e termos fontes idênticos aos dados pela Eq. (3.27).

As variáveis analisadas e soluções são as mesmas da seção 3.1.5.

As condições de contorno aplicadas tanto para  $\psi$  quanto  $\omega$  são as soluções analíticas conhecidas nos contornos, isto para ser possível a utilização de segunda ordem de acurácia em todas as aproximações.

Se fosse utilizado as condições de contorno usuais para este tipo de formulação (SANTIAGO, 2010), seria necessário aplicar ordem de acurácia unitária nas aproximações para os termos advectivos, garantindo assim a convergência da solução.

### 3.1.7 Problema 5: Laplace 3D

O problema de Laplace 3D (MANIKONDA *et al.*, 2005) é definido pela Eq. (3.31) e surge ao fazer as seguintes hipóteses na equação da conservação da energia térmica:

- Problema tridimensional
- Regime permanente
- Coordenadas cartesianas
- Propriedades físicas constantes
- Ausência de taxa de geração interna de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{3.31}$$

As condições de contorno são dadas por,

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) = T(x, 0, z) = T(x, 1, z) = T(0, y, z) = T(1, y, z) = 0 \\ T(x, y, 1) = \sinh(\sqrt{2}\pi) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Desta forma a Eq. (3.31) admite solução analítica dada por:  $T(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sinh(\sqrt{2}\pi z)[K]$ . As condições de contorno são do tipo Dirichlet, com o valor em cada um dos seis contornos dado pela solução analítica no cubo de lado unitário.

As variáveis analisadas são semelhantes às da seção 3.1.2 embora estas sejam agora no domínio tridimensional: (1)  $T$  no domínio de cálculo, (2) Temperatura central do domínio, (3) Temperatura média dada pela Eq. (3.33) e (4) Taxa de transferência de calor no contorno leste dada pela Eq. (3.34).

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ \bar{T} &= \frac{1}{1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 T(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\bar{T} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^3} [2 \cosh(\sqrt{2} \pi) - 2] [K]$$

em que  $L_z$  é o comprimento do domínio de cálculo na direção  $z$ , unitário.

$$\begin{aligned} Q_e &= -\kappa \int_0^1 \int_0^1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} dy dz \\ Q_e &= 2\kappa \frac{\cosh(\sqrt{2}\pi) - 1}{\sqrt{2}\pi} [W] \end{aligned} \quad (3.34)$$

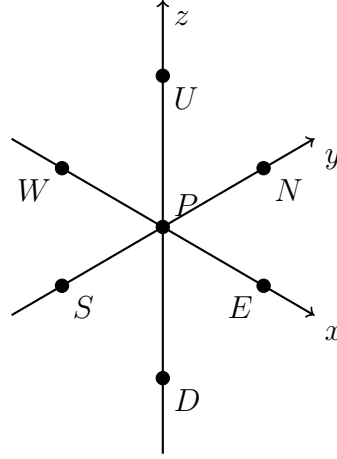
Considerando uma malha genérica de diferenças finitas dada pela Fig. 3.3, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.35).

$$\frac{T_E + \Phi_W - 2 T_P}{h^2} + \frac{T_N + T_S - 2 T_P}{h^2} + \frac{T_U + T_D - 2 T_P}{h^2} = 0 \quad (3.35)$$

Portanto deixando a Eq. (3.35) na forma de equação geral do sistema linear heptadiagonal dado pela Eq. (3.36) obtêm-se os coeficientes e termos fontes dados pela Eq. (3.37).

$$a_P \phi_P = a_D \phi_D + a_S \phi_S + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_N \phi_N + a_U \phi_U + b_P \quad (3.36)$$

Figura 3.3 – Malha 3D genérica de diferenças finitas.



$$\begin{aligned}
 a_D &= 1 \\
 a_S &= 1 \\
 a_W &= 1 \\
 a_P &= 6 \\
 a_E &= 1 \\
 a_N &= 1 \\
 a_U &= 1 \\
 b_P &= 0
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Considerando uma malha genérica de volumes finitos cujos nós dos volumes são dados na Fig. 3.3, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.38).

$$\begin{aligned}
 \int_d^u \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] dx dy dz &= 0 \\
 h^2 \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_u - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_d \right] &= 0 \\
 h^2 \left[ \frac{T_E - T_P}{h} - \frac{T_P - T_W}{h} + \frac{T_N - T_P}{h} - \frac{T_P - T_S}{h} + \frac{T_U - T_P}{h} - \frac{T_P - T_D}{h} \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Portanto deixando a Eq. (3.38) na forma de equação geral do sistema linear heptadiagonal dado pela Eq. (3.36) obtêm-se os coeficientes e termos fontes idênticos aos dados pela Eq. (3.37).

### 3.1.8 Problema 6: Poisson 3D

O problema de Poisson 3D (GE, 2010) é definido pela Eq. (3.39) e surge ao fazer as seguintes hipóteses na equação da conservação da energia térmica:

- Problema tridimensional
- Regime permanente
- Coordenadas cartesianas
- Propriedades físicas constantes
- Presença de taxa de geração interna de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + S^\phi = 0 \quad (3.39)$$

As condições de contorno e termo fonte são dadas por:

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) = T(x, 0, z) = T(x, 1, z) = T(0, y, z) = T(1, y, z) = T(x, y, 1) = 0 \\ S^\phi(x, y, z) = 3\pi^2 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \text{sen}(\pi z) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Desta forma a Eq. (3.39) admite solução analítica dada por:  $T(x, y, z) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \text{sen}(\pi z) [K]$ .

As variáveis analisadas são semelhantes às da seção 3.1.2 embora estas sejam agora no domínio tridimensional: (1)  $T$  no domínio de cálculo, (2) Temperatura central do domínio, (3) Temperatura média dada pela Eq. (3.41) e (4) Taxa de transferência de calor no contorno leste dada pela Eq. (3.42).

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ \bar{T} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 T(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{8}{\pi^3} [K] \\ Q_e &= -\kappa \int_0^1 \int_0^1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} dy dz \\ Q_e &= \frac{4\kappa}{\pi} [W] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Considerando uma malha genérica de diferenças finitas dada pela Fig. 3.3, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.43).

$$\frac{T_E + T_W - 2 T_P}{h^2} + \frac{T_N + T_S - 2 T_P}{h^2} + \frac{T_U + T_D - 2 T_P}{h^2} + S_P^T = 0 \quad (3.43)$$

Portanto deixando a Eq. (3.43) na forma de equação geral do sistema linear heptadiagonal dado pela Eq. (3.36) obtêm-se os coeficientes e termos fontes dados pela Eq. (3.44).

$$\begin{aligned} a_D &= 1 \\ a_S &= 1 \\ a_W &= 1 \\ a_P &= 6 \\ a_E &= 1 \\ a_N &= 1 \\ a_U &= 1 \\ b_P &= h^2 S_P^\phi \end{aligned} \quad (3.44)$$

Considerando uma malha genérica de volumes finitos cujos nós dos volumes são demonstrados na Fig. 3.3, o modelo numérico para este problema é dado pela Eq. (3.45).

$$\begin{aligned} \int_d^u \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + S_P^T \right] dx dy dz &= 0 \\ h^2 \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_u - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_d \right] + S_P^T h^3 &= 0 \\ h^2 \left[ \frac{T_E - T_P}{h} - \frac{T_P - T_W}{h} + \frac{T_N - T_P}{h} - \frac{T_P - T_S}{h} + \frac{T_U - T_P}{h} - \frac{T_P - T_D}{h} \right] + S_P^T h^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Portanto deixando a Eq. (3.45) na forma de equação geral do sistema linear heptadiagonal dado pela Eq. (3.36) obtêm-se os coeficientes e termos fontes idênticos aos dados pela Eq. (3.44).

Após a obtenção da solução numérica do problema, ao aplicar a metodologia de de extrapolação em campo, o CRE, é necessário algum tipo de interpolação.

## 3.2 INTERPOLAÇÃO

É importante notar que os problemas apresentados neste trabalho são bidimensionais e tridimensionais, embora a interpolação utilizada seja unidimensional (diferenças divididas



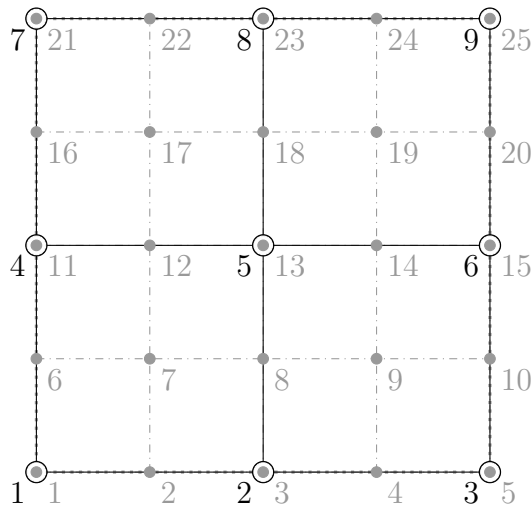
de Newton, cujas equações gerais estão mostradas na seção 2.5).

Isto é possível pois como as malhas utilizadas especificamente neste trabalho são uniformes, mantêm-se uma direção em determinada posição e apenas interpola-se nas direções desejadas e assim sucessivamente.

Em casos mais gerais onde a malha utilizada não é uniforme nem é estruturada, faz-se necessário uma interpolação mais genérica nas direções de interesse.

Ao aplicar esta metodologia utilizando diferenças finitas como mostrado na Fig. 3.4 para um caso bidimensional, há nós que coincidem. Nesses nós aplica-se a correção diretamente. Nos demais é necessário realizar alguma forma de interpolação, todas seguindo a metodologia citada no final desta seção.

Figura 3.4 – Duas malhas de diferenças finitas sobrepostas: em preto estão mostrados os nós da malha grossa  $3^2$ , em cinza os nós da malha fina  $5^2$ .



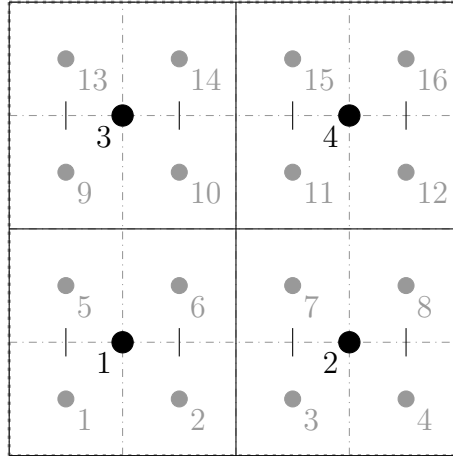
No caso bidimensional será necessário fazer três tipos de interpolações, tendo como exemplo a Fig. 3.4: a) os pontos 2, 4, 12, 14, 22 e 24 serão obtidos por interpolações unidimensionais na direção x, b) os pontos 6, 8, 10, 16, 18 e 20 serão obtidos por interpolações unidimensionais na direção y e c) os pontos 7, 9, 17 e 19 podem ser obtidos por interpolações unidimensionais usando os pontos interpolados dos itens a) ou b) tanto na direção x ou y respectivamente.

O caso tridimensional será análogo ao bidimensional, atentando que serão feitas quatro tipos de interpolações unidimensionais: entre nós coincidentes na direção x, entre nós coincidentes na direção y e entre nós coincidentes na direção z; os demais pontos podem ser obtidos por interpolações unidimensionais dos nós interpolados anteriormente.

Ao aplicar a metodologia CRE utilizando volumes finitos como mostrado na Fig. 3.5, nenhum ponto da malha coincide, por este motivo foram interpolados todos os pontos da malha grossa para os pontos da malha fina, após isto se obtêm a correção e esta é

aplicada diretamente a todos os nós da malha.

Figura 3.5 – Duas malhas de volumes finitos sobrepostas, em preto estão mostrados os nós da malha grossa 2x2, em cinza os nós da malha fina 4x4, o meio das faces interpoladas está em preto



A interpolação no caso bidimensional em volumes finitos possui duas etapas, tendo como exemplo a Fig. 3.5: a) utilizando os pontos 1 e 2 e ainda os pontos 3 e 4 interpola-se na direção x entre cada uma delas de forma a obter um valor para o meio das faces dos volumes na malha fina como mostrado em linhas pretas na Fig. 3.5, b) utilizando estes valores interpola-se na direção y para o meio de todos os volumes.

No caso tridimensional será análogo ao bidimensional, atentando que serão feitas três etapas de interpolações: a) interpolam-se os nós na direção x para o meio dos segmentos que ligam as quinas, b) interpola-se o meio dos segmentos na direção y para o meio das faces na direção z e c) interpola-se na direção z o meio das faces para o meio dos volumes.

O grau de interpolação utilizado foi de 15°. No caso de não haver pontos suficientes o máximo grau de interpolação dado por aqueles pontos foi utilizado.

Para grau ímpar de interpolação, que corresponde a número par de pontos interpoladores, opta-se sempre por interpolar o valor de interesse com número de pontos iguais em ambos lados; se for grau de interpolação par, que corresponde a número ímpar de pontos interpoladores, utiliza-se um ponto a mais para à esquerda. No caso em que o valor de interesse na interpolação estiver próximo dos contornos, ou seja, não há pontos igualmente espaçados para utilizar, utilizam-se mais pontos na direção do interior do domínio.

### 3.3 REDUÇÃO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Se a variável analisada for pontual ou global para reduzir o erro de discretização serão utilizadas as múltiplas extrapolações de Richardson dada pela Eq. (2.16) para  $\phi_\infty$  de maneira sucessiva, isto é, para cada duas malhas consecutivas (com refino  $r$ ),  $\phi_\infty$  é obtido como dado pela Tab. 2.1.

Se a variável de interesse é todo o campo de soluções, neste trabalho utilizou-se vários níveis de CRE com interpolações dadas pelas diferenças divididas de Newton.

O algoritmo para a aplicação de múltiplos níveis de CRE em **diferenças finitas** é dado por:

1. Inicia-se  $m^* = 0$ .
2. Sendo o nível de extrapolação  $m = m^* + 1$  e  $g = m$ .
3. Entre as malhas grossa  $g = m$  e fina  $g = m + 1$  faça:
4. Para os nós coincidentes entre as malhas, como demonstrado na Fig. 3.4, obtenha a correção de Richardson, dado pela Eq. (2.17).
5. Para os nós não coincidentes entre as malhas, aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson. Esta interpolação deve apresentar, obrigatoriamente, grau igual ou superior à ordem de acurácia final desejada, se isto não for aplicado, um limite de acurácia irá surgir dado o grau de interpolação utilizado.
6. Aplicar a correção de Richardson, tanto nos nós coincidentes quanto para os nós não coincidentes para todos os pontos da malha fina.
7. Repetir os itens 3 a 6 com  $m^* = m$  até chegar-se na malha  $g=G-1$ .
8. Repetir os itens 2 a 7 até chegar-se ao maior nível possível de extrapolações  $m=G-1$ .

O algoritmo para a aplicação de CRE em **volumes finitos** é dado por:

1. Inicia-se  $m^* = 0$ .
2. Sendo o nível de extrapolação  $m = m^* + 1$ .
3. Entre as malhas  $g = m$  e  $g = m + 1$  faça:
4. Como observado na Fig. 3.5, não há volumes que mantenham a posição com razão de refino 2. Portanto serão interpolados os valores da malha  $g=m$  para todos os pontos respectivos da malha  $g=m+1$ .
5. Obter e aplicar a correção de Richardson Eq. 2.17 para todos os volumes.
6. Repetir os itens 3 a 5 com  $m^* = m$  até a malha  $g = G - 1$ .
7. Repetir os itens 2 a 6 até o maior nível possível de extrapolações  $m = G - 1$ .

### 3.4 REDUÇÃO DO ERRO DE ITERAÇÃO

Primeiramente para reduzir este tipo de erro deve-se minimizar as demais fontes de erro citadas na seção 2.1. O código computacional deve ser verificado, ou seja, a solução deste código deve ser comparada com a solução analítica (se existente ou ainda fabricada) do problema e erros de programação e demais fontes devem ser minimizadas (ASME, 2009).

Os códigos computacionais Burgers 2D e Navier-Stokes 2D com *multigrid* no método das diferenças finitas foram implementados por um integrante do grupo de pesquisa a qual o autor desta tese é vinculado, portanto foram verificados em trabalhos anteriores, ou seja, realmente estes códigos foram testados e resolvem numericamente o problema estudado. Os demais códigos em diferenças finitas foram implementados pelo autor sem *multigrid*.

Todos os códigos computacionais em volumes finitos foram programados pelo autor com o método *multigrid* de correções aditivas (KELLER, 2007) com correção ponderada.

Correção ponderada aqui significa que ao aplicá-la a todas as malhas grosseiras até se chegar na malha mais fina, cada uma das correções dos volumes é multiplicada por um peso que varia de 1 a 2, isto aumenta a convergência do método e o torna mais próximo do *multigrid* teórico, ou seja, ordem de complexidade do algoritmo próximo de 1.

Não se encontrou na literatura nenhum trabalho ou justificativa para este fenômeno, portanto é um ponto em investigação na literatura.

A redução no erro de iteração investigada neste trabalho é a estimativa inicial acurada e apenas em alguns problemas modelo: Laplace 2D DF, Advecção-Difusão 2D DF, Burgers 2D DF e Navier-Stokes 2D DF é apresentada a comparação de tempos de CPU em função da estimativa inicial.

A justificativa é que uma redução no tempo de CPU é esperada conforme a estimativa inicial se torna mais acurada, ou seja, conforme reduz-se o erro de iteração inicial espera-se uma maior redução no tempo de CPU.

Apenas resultados desta comparação em problemas sem *multigrid* é mostrada neste trabalho, isto pois para problemas com *multigrid*, não houve ganhos com a estimativa inicial isto pois a forma de cálculo do tempo de CPU considerou todos os tempos de estimativa utilizados: tanto do cálculo da estimativa na malha, um ciclo para confirmação do erro de iteração e o tempo de CPU das malhas anteriores utilizadas.

Para a estimativa de uma solução inicial foram propostos métodos baseados na extrapolação de Richardson. Esta extrapolação pode ser usada não apenas para reduzir o erro de discretização ou estimar esse erro da solução numérica, mas sim para obter uma boa aproximação para a solução na próxima malha, a qual depende de ambas aproximações, uma vez que:  $\phi = \Phi - E_h$  ou ainda  $\phi = \phi_\infty - U_h$ , onde  $\phi$  é a estimativa para a próxima

malha. Foram propostos portanto os seguintes métodos:

- Estimativa da solução analítica ( $\phi_\infty$ ): Método CRE sem modificações em duas malhas e interpolação da solução obtida como estimativa inicial para a próxima malha.
- Numérico monocoeficiente ( $\phi_h$ ): Mesmo que o método  $\phi_\infty$  mas modificado para estimativa inicial de mesma ordem de acurácia da solução numérica.
- Numérico bicoeficiente ( $\phi_{h,bc}$ ): Baseado em  $\phi_h$  mas considerando dois termos na estimativa do erro de discretização.
- Numérico tricoeficiente ( $\phi_{h,trc}$ ): Baseado em  $\phi_h$  mas considerando três termos na estimativa do erro de discretização.
- Numérico tetracoeficiente ( $\phi_{h,tec}$ ): Baseado em  $\phi_h$  mas considerando quatro termos na estimativa do erro de discretização.
- Analítico monocoeficiente ( $\phi_{an}$ ): Mesmo que o método  $\phi_h$  mas dependendo da solução analítica do problema.
- Analítico bicoeficiente ( $\phi_{an,bc}$ ): Baseado em  $\phi_{an}$  mas considerando dois termos na estimativa do erro de discretização.
- Analítico tricoeficiente ( $\phi_{an,trc}$ ): Baseado em  $\phi_{an}$  mas considerando três termos na estimativa do erro de discretização.
- Analítico tetracoeficiente ( $\phi_{an,tec}$ ): Baseado em  $\phi_{an}$  mas considerando quatro termos na estimativa do erro de discretização.
- Analítico pentacoeficiente ( $\phi_{an,pc}$ ): Baseado em  $\phi_{an}$  mas considerando cinco termos na estimativa do erro de discretização.

### 3.4.1 Estimativa da solução analítica

O método  $\phi_\infty$  é o mesmo de CRE mas adaptado para interpolação da solução como estimativa inicial para a próxima malha, ou seja, os passos na obtenção da solução CRE para todos os nós da malha anterior não se alteram.

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_\infty$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em duas malhas,  $g - 2$  e  $g - 1$ , com refino  $r$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g - 2$  e  $g - 1$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (2.17) e obter o valor de  $C_\infty$ .

3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g - 2$  e  $g - 1$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g - 1$  com  $\phi_\infty = \phi_2 + C_\infty$
5. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g$  e  $g - 1$ , aplicar diretamente o valor de  $\phi_\infty$ .
6. Para os nós não coincidentes aplicar um determinado grau de interpolação para o valor de  $\phi_\infty$ .

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_\infty$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em duas malhas,  $g - 2$  e  $g - 1$ , com refino  $r$ .
2. Para todos os volumes da malha  $g - 2$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g - 1$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (2.17) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g - 1$  com  $\phi_\infty = \phi_2 + C_\infty$
4. Para todos os volumes da malha  $g - 1$  interpolar e obter  $\phi_\infty$  na malha  $g$ .

### 3.4.2 Numérico monocoeficiente

O método  $\phi_h$  segue a mesma metodologia de  $\phi_\infty$  salvo que a incógnita agora não é o valor da extrapolação de Richardson em si ( $\phi_\infty$ ), mas sim uma estimativa da solução para a próxima malha (malha 3), a qual depende tanto de uma estimativa acurada do erro de discretização quanto da solução analítica do problema.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.46) em que os valores conhecidos são:  $[\phi_1, \phi_2, p_0, h_3, h_1 \text{ e } h_2]$  e os desconhecidos são:  $[\phi_\infty, K_0 \text{ e } \phi_3]$ . Se a razão de refino for constante ( $r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3}$ ) tem-se a solução de  $\phi_3$  dada pela Eq. (3.47).

$$\begin{cases} \phi_\infty - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} \\ \phi_\infty - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} \\ \phi_\infty - \phi_3 = K_0 h_3^{p_0} \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \phi_2 + C_h \\ C_h &= \frac{\phi_2 - \phi_1}{r^{p_0}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_h$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em duas malhas,  $g - 2$  e  $g - 1$ , com refino  $r$ .

2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g - 2$  e  $g - 1$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.47) e obter o valor de  $C_h$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g - 2$  e  $g - 1$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g - 1$  com  $\phi_3 = \phi_2 + C_h$
5. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g$  e  $g - 1$ , aplicar diretamente o valor de  $\phi_3$ .
6. Para os nós não coincidentes aplicar um determinado grau de interpolação para o valor de  $\phi_3$ .

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_h$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em duas malhas,  $g - 2$  e  $g - 1$ , com refino  $r$ .
2. Para todos os volumes da malha  $g - 2$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g - 1$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.47) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g - 1$  com  $\phi_3 = \phi_2 + C_h$
4. Para todos os volumes da malha  $g - 1$  interpolar e obter  $\phi_3$  na malha  $g$ .

### 3.4.3 Numérico bicoeficiente

O método  $\phi_{h,bc}$  segue a mesma metodologia de  $\phi_h$  salvo que agora se utiliza dois termos na estimativa do erro de discretização.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.48) em que os valores conhecidos são:  $[\phi_1, \phi_2, \phi_3, p_0, p_1, h_1, h_2, h_3 \text{ e } h_4]$  e os desconhecidos são:  $[\phi_\infty, K_0, K_1 \text{ e } \phi_4]$ . Se a razão de refino for constante ( $r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{h_3}{h_4}$ ) tem-se a solução de  $\phi_4$  dada pela Eq. (3.49).

$$\begin{cases} \phi_\infty - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} + K_1 h_1^{p_1} \\ \phi_\infty - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} + K_1 h_2^{p_1} \\ \phi_\infty - \phi_3 = K_0 h_3^{p_0} + K_1 h_3^{p_1} \\ \phi_\infty - \phi_4 = K_0 h_4^{p_0} + K_1 h_4^{p_1} \end{cases} \quad (3.48)$$

$$C_{h,bc} = \left( \frac{1}{r^{p_1}} + \frac{1}{r^{p_0}} \right) \phi_3 - \left( \frac{1}{r^{p_1}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1}} + \frac{1}{r^{p_0}} \right) \phi_2 + \frac{1}{r^{p_0+p_1}} \phi_1 \quad (3.49)$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{h,bc}$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em três malhas,  $g - 3$ ,  $g - 2$  e  $g - 1$ , com refino  $r$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g - 3$ ,  $g - 2$  e  $g - 1$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.49) e obter o valor de  $C_{h,bc}$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g - 3$ ,  $g - 2$  e  $g - 1$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g - 1$  com  $\phi_4 = \phi_3 + C_{h,bc}$
5. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g$  e  $g - 1$ , aplicar diretamente o valor de  $\phi_4$ .
6. Para os nós não coincidentes aplicar um determinado grau de interpolação para o valor de  $\phi_4$ .

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{h,bc}$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em três malhas,  $g - 3$ ,  $g - 2$  e  $g - 1$ , com refino  $r$ .
2. Para todos os volumes das malhas  $g - 3$  e  $g - 2$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g - 1$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.49) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g - 1$  com  $\phi_4 = \phi_3 + C_h$
4. Para todos os volumes da malha  $g - 1$  interpolar e obter  $\phi_4$  na malha  $g$ .

### 3.4.4 Numérico tricoeficiente

No método  $\phi_{h,trc}$  utilizam-se três termos na estimativa do erro de discretização.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.50) em que os valores conhecidos são:  $[\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, p_0, p_1, p_2, h_1, h_2, h_3, h_4 \text{ e } h_5]$  e os desconhecidos são:  $[\phi_\infty, K_0, K_1, K_2 \text{ e } \phi_5]$ . Se a razão de refino for constante ( $r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{h_3}{h_4} = \frac{h_4}{h_5}$ ) tem-se a solução de  $\phi_5$  dada pela Eq. (3.51).

$$\begin{cases} \phi_\infty - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} + K_1 h_1^{p_1} + K_2 h_1^{p_2} \\ \phi_\infty - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} + K_1 h_2^{p_1} + K_2 h_2^{p_2} \\ \phi_\infty - \phi_3 = K_0 h_3^{p_0} + K_1 h_3^{p_1} + K_2 h_3^{p_2} \\ \phi_\infty - \phi_4 = K_0 h_4^{p_0} + K_1 h_4^{p_1} + K_2 h_4^{p_2} \\ \phi_\infty - \phi_5 = K_0 h_5^{p_0} + K_1 h_5^{p_1} + K_2 h_5^{p_2} \end{cases} \quad (3.50)$$



$$\begin{aligned}
\phi_5 &= \phi_4 + C_{h,trc} \\
C_{h,trc} &= \left( \frac{1}{r^{p_2}} + \frac{1}{r^{p_1}} + \frac{1}{r^{p_0}} \right) \phi_4 \\
&- \left( \frac{1}{r^{p_2}} + \frac{1}{r^{p_1}} + \frac{1}{r^{p_0}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2}} \right) \phi_3 \\
&+ \left( \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2}} \right) \phi_2 \\
&- \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2}} \phi_1
\end{aligned} \tag{3.51}$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{h,trc}$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em quatro malhas,  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ , com refino  $r$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.51) e obter o valor de  $C_{h,trc}$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g-1$  com  $\phi_5 = \phi_4 + C_{h,trc}$
5. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g$  e  $g-1$ , aplicar diretamente o valor de  $\phi_5$ .
6. Para os nós não coincidentes aplicar um determinado grau de interpolação para o valor de  $\phi_5$ .

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{h,trc}$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em quatro malhas,  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ , com refino  $r$ .
2. Para todos os volumes das malhas  $g-4$ ,  $g-3$  e  $g-2$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g-1$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.51) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g-1$  com  $\phi_5 = \phi_4 + C_h$
4. Para todos os volumes da malha  $g-1$  interpolar e obter  $\phi_5$  na malha  $g$ .

### 3.4.5 Numérico tetracoeficiente

No método  $\phi_{h,tec}$  utilizam-se quatro termos na estimativa do erro de discretização.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.52) em que os valores conhecidos são:  $[\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, p_0, p_1, p_2, p_3, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5]$  e os desconhecidos

são:  $[\phi_\infty, K_0, K_1, K_2, K_3 \text{ e } \phi_6]$ . Se a razão de refino for constante ( $r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{h_3}{h_4} = \frac{h_4}{h_5} = \frac{h_5}{h_6}$ ) tem-se a solução de  $\phi_6$  dada pela Eq. (3.53).

$$\begin{cases} \phi_\infty - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} + K_1 h_1^{p_1} + K_2 h_1^{p_2} + K_3 h_1^{p_3} \\ \phi_\infty - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} + K_1 h_2^{p_1} + K_2 h_2^{p_2} + K_3 h_2^{p_3} \\ \phi_\infty - \phi_3 = K_0 h_3^{p_0} + K_1 h_3^{p_1} + K_2 h_3^{p_2} + K_3 h_3^{p_3} \\ \phi_\infty - \phi_4 = K_0 h_4^{p_0} + K_1 h_4^{p_1} + K_2 h_4^{p_2} + K_3 h_4^{p_3} \\ \phi_\infty - \phi_5 = K_0 h_5^{p_0} + K_1 h_5^{p_1} + K_2 h_5^{p_2} + K_3 h_5^{p_3} \\ \phi_\infty - \phi_6 = K_0 h_6^{p_0} + K_1 h_6^{p_1} + K_2 h_6^{p_2} + K_3 h_6^{p_3} \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \phi_6 &= \phi_5 + C_{h,tec} \\ C_4 &= \frac{1}{r^{p_0}} + \frac{1}{r^{p_1}} + \frac{1}{r^{p_2}} + \frac{1}{r^{p_3}} \\ C_3 &= \frac{1}{r^{p_0+p_1}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2}} + \frac{1}{r^{p_0+p_3}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2}} + \frac{1}{r^{p_1+p_3}} + \frac{1}{r^{p_2+p_3}} \\ C_2 &= \frac{1}{r^{p_1+p_2+p_3}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2+p_3}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_3}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2}} \\ C_1 &= \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2+p_3}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$C_{h,tec} = C_4 \phi_5 - (C_4 + C_3) \phi_4 + (C_3 + C_2) \phi_3 - (C_2 + C_1) \phi_2 + C_1 \phi_1$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{h,tec}$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em cinco malhas,  $g - 5, g - 4, g - 3, g - 2$  e  $g - 1$ , com refino  $r$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g - 5, g - 4, g - 3, g - 2$  e  $g - 1$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.53) e obter o valor de  $C_{h,tec}$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g - 5, g - 4, g - 3, g - 2$  e  $g - 1$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g - 1$  com  $\phi_6 = \phi_5 + C_{h,tec}$
5. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g$  e  $g - 1$ , aplicar diretamente o valor de  $\phi_6$ .
6. Para os nós não coincidentes aplicar um determinado grau de interpolação para o valor de  $\phi_6$ .

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{h,tec}$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em cinco malhas,  $g - 5, g - 4, g - 3, g - 2$  e  $g - 1$ , com refino  $r$ .

2. Para todos os volumes das malhas  $g - 5$ ,  $g - 4$ ,  $g - 3$  e  $g - 2$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g - 1$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.53) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g - 1$  com  $\phi_6 = \phi_5 + C_h$
4. Para todos os volumes da malha  $g - 1$  interpolar e obter  $\phi_6$  na malha  $g$ .

### 3.4.6 Analítico monocoeficiente

O método  $\phi_{an}$  segue a mesma metodologia de  $\phi_h$  salvo que o erro de discretização é obtido diretamente da diferença entre a solução do problema e a solução analítica.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.54) em que os valores conhecidos são:  $[\Phi, \phi_1, p_0, h_2 \text{ e } h_1]$  e os desconhecidos são:  $[K_0 \text{ e } \phi_2]$ . Se a razão de refino for dada por  $r = \frac{h_1}{h_2}$  tem-se a solução de  $\phi_2$  dada pela Eq. (3.55).

$$\begin{cases} \Phi - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} \\ \Phi - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \Phi + C_{an} \\ C_{an} &= \frac{\phi_1 - \Phi}{r^{p_0}} \end{aligned} \quad (3.55)$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an}$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica na malha  $g - 1$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g - 1$  e  $g$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.55) e obter o valor de  $C_{an}$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g - 1$  e  $g$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_2 = \Phi + C_{an}$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an}$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica na malha  $g - 1$ .
2. Para todos os volumes da malha  $g - 1$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.55) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_2 = \Phi + C_{an}$

### 3.4.7 Analítico bicoeficiente

O método  $\phi_{an,bc}$  segue a mesma metodologia de  $\phi_{h,bc}$  salvo que o erro de discretização é obtido diretamente da diferença entre a solução do problema e a solução analítica.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.56) em que os valores conhecidos são:  $[\Phi, \phi_1, \phi_2, p_0, p_1, h_1, h_2 \text{ e } h_3]$  e os desconhecidos são:  $[K_0, K_1 \text{ e } \phi_3]$ . Se a razão de refino for constante ( $r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3}$ ) tem-se a solução de  $\phi_3$  dada pela Eq. (3.57).

$$\begin{cases} \Phi - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} + K_1 h_1^{p_1} \\ \Phi - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} + K_1 h_2^{p_1} \\ \Phi - \phi_3 = K_0 h_3^{p_0} + K_1 h_3^{p_1} \end{cases} \quad (3.56)$$

$$C_{an,bc} = \left( \frac{1}{r^{p_0+p_1}} - \frac{1}{r^{p_0}} - \frac{1}{r^{p_1}} \right) \Phi + \left( \frac{1}{r^{p_0}} + \frac{1}{r^{p_1}} \right) \phi_1 - \frac{1}{r^{p_0+p_1}} \phi_2 \quad (3.57)$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an,bc}$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em duas malhas com refino  $r$ ,  $g-2$  e  $g-1$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g-2$ ,  $g-1$  e  $g$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.57) e obter o valor de  $C_{an,bc}$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g-2$ ,  $g-1$  e  $g$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_3 = \Phi + C_{an,bc}$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an,bc}$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em duas malhas com refino  $r$ ,  $g-2$  e  $g-1$ .
2. Para todos os volumes das malhas  $g-2$ ,  $g-1$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.57) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_3 = \Phi + C_{an,bc}$

### 3.4.8 Analítico tricoeficiente

No método  $\phi_{an,trc}$  utilizam-se três termos na estimativa do erro de discretização.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.58) em que os valores conhecidos são:  $[\Phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3, p_0, p_1, p_2, h_1, h_2, h_3 \text{ e } h_4]$  e os desconhecidos são:  $[K_0, K_1,$

$K_2$  e  $\phi_4$ ]. Se a razão de refino for constante ( $r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{h_3}{h_4}$ ) tem-se a solução de  $\phi_4$  dada pela Eq. (3.59).

$$\begin{cases} \Phi - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} + K_1 h_1^{p_1} + K_2 h_1^{p_2} \\ \Phi - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} + K_1 h_2^{p_1} + K_2 h_2^{p_2} \\ \Phi - \phi_3 = K_0 h_3^{p_0} + K_1 h_3^{p_1} + K_2 h_3^{p_2} \\ \Phi - \phi_4 = K_0 h_4^{p_0} + K_1 h_4^{p_1} + K_2 h_4^{p_2} \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \phi_4 &= \Phi + C_{an,trc} \\ C_3 &= \frac{1}{r^{p_0}} + \frac{1}{r^{p_1}} + \frac{1}{r^{p_2}} \\ C_2 &= \frac{1}{r^{p_0+p_1}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2}} \\ C_1 &= \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2}} \\ C_{an,trc} &= (-C_1 + C_2 - C_3) \Phi + C_3 \phi_3 - C_2 \phi_2 + C_1 \phi_1 \end{aligned} \quad (3.59)$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an,trc}$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em três malhas com refino  $r$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g-3$ ,  $g-2$ ,  $g-1$  e  $g$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.59) e obter o valor de  $C_{an,trc}$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g-3$ ,  $g-2$ ,  $g-1$  e  $g$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_4 = \Phi + C_{an,trc}$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an,trc}$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em duas malhas com refino  $r$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ .
2. Para todos os volumes das malhas  $g-3$ ,  $g-2$ ,  $g-1$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.59) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_4 = \Phi + C_{an,trc}$

### 3.4.9 Analítico tetracoeficiente

No método  $\phi_{an,tec}$  utilizam-se quatro termos na estimativa do erro de discretização.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.60) em que os valores conhecidos são:  $[\Phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, p_0, p_1, p_2, p_3, h_1, h_2, h_3, h_4 \text{ e } h_5]$  e os desconhecidos

são:  $[K_0, K_1, K_2, K_3 \text{ e } \phi_5]$ . Se a razão de refino for constante ( $r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{h_3}{h_4} = \frac{h_4}{h_5}$ ) tem-se a solução de  $\phi_5$  dada pela Eq. (3.61).

$$\begin{cases} \Phi - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} + K_1 h_1^{p_1} + K_2 h_1^{p_2} + K_3 h_1^{p_3} \\ \Phi - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} + K_1 h_2^{p_1} + K_2 h_2^{p_2} + K_3 h_2^{p_3} \\ \Phi - \phi_3 = K_0 h_3^{p_0} + K_1 h_3^{p_1} + K_2 h_3^{p_2} + K_3 h_3^{p_3} \\ \Phi - \phi_4 = K_0 h_4^{p_0} + K_1 h_4^{p_1} + K_2 h_4^{p_2} + K_3 h_4^{p_3} \\ \Phi - \phi_5 = K_0 h_5^{p_0} + K_1 h_5^{p_1} + K_2 h_5^{p_2} + K_3 h_5^{p_3} \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \phi_5 &= \Phi + C_{an,tec} \\ C_4 &= \frac{1}{r^{p_0}} + \frac{1}{r^{p_1}} + \frac{1}{r^{p_2}} + \frac{1}{r^{p_3}} \\ C_3 &= \frac{1}{r^{p_0+p_1}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2}} + \frac{1}{r^{p_0+p_3}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2}} + \frac{1}{r^{p_1+p_3}} + \frac{1}{r^{p_2+p_3}} \\ C_2 &= \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_3}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2+p_3}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2+p_3}} \\ C_1 &= \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2+p_3}} \\ C_{an,tec} &= (C_1 - C_2 + C_3 - C_4) \Phi + C_4 \phi_4 - C_3 \phi_3 + C_2 \phi_2 - C_1 \phi_1 \end{aligned} \quad (3.61)$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an,tec}$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em três malhas com refino  $r$ ,  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$ ,  $g-1$  e  $g$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.61) e obter o valor de  $C_{an,tec}$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$ ,  $g-1$  e  $g$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_5 = \Phi + C_{an,tec}$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an,tec}$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em duas malhas com refino  $r$ ,  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ .
2. Para todos os volumes das malhas  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$ ,  $g-1$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.61) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_5 = \Phi + C_{an,tec}$

### 3.4.10 Analítico pentacoeficiente

No método  $\phi_{an,pc}$  utilizam-se cinco termos na estimativa do erro de discretização.

A forma do sistema de equações se altera para a Eq. (3.62) em que os valores conhecidos são:  $[\Phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \text{ e } h_6]$  e os desconhecidos são:  $[K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 \text{ e } \phi_6]$ . Se a razão de refino for constante ( $r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{h_3}{h_4} = \frac{h_4}{h_5} = \frac{h_5}{h_6}$ ) tem-se a solução de  $\phi_6$  dada pela Eq. (3.63).

$$\begin{cases} \Phi - \phi_1 = K_0 h_1^{p_0} + K_1 h_1^{p_1} + K_2 h_1^{p_2} + K_3 h_1^{p_3} + K_4 h_1^{p_4} \\ \Phi - \phi_2 = K_0 h_2^{p_0} + K_1 h_2^{p_1} + K_2 h_2^{p_2} + K_3 h_2^{p_3} + K_4 h_2^{p_4} \\ \Phi - \phi_3 = K_0 h_3^{p_0} + K_1 h_3^{p_1} + K_2 h_3^{p_2} + K_3 h_3^{p_3} + K_4 h_3^{p_4} \\ \Phi - \phi_4 = K_0 h_4^{p_0} + K_1 h_4^{p_1} + K_2 h_4^{p_2} + K_3 h_4^{p_3} + K_4 h_4^{p_4} \\ \Phi - \phi_5 = K_0 h_5^{p_0} + K_1 h_5^{p_1} + K_2 h_5^{p_2} + K_3 h_5^{p_3} + K_4 h_5^{p_4} \\ \Phi - \phi_6 = K_0 h_6^{p_0} + K_1 h_6^{p_1} + K_2 h_6^{p_2} + K_3 h_6^{p_3} + K_4 h_6^{p_4} \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \phi_6 &= \Phi + C_{an,tec} \\ C_5 &= \frac{1}{r^{p_0}} + \frac{1}{r^{p_1}} + \frac{1}{r^{p_2}} + \frac{1}{r^{p_3}} + \frac{1}{r^{p_4}} \\ C_4 &= \frac{1}{\frac{1}{r^{p_0+p_1}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2}} + \frac{1}{r^{p_0+p_3}} + \frac{1}{r^{p_0+p_4}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2}} +} \\ &\quad \frac{1}{\frac{1}{r^{p_1+p_3}} + \frac{1}{r^{p_1+p_4}} + \frac{1}{r^{p_2+p_3}} + \frac{1}{r^{p_2+p_4}} + \frac{1}{r^{p_3+p_4}}} \\ C_3 &= \frac{1}{\frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_3}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_4}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2+p_3}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2+p_4}} +} \\ &\quad \frac{1}{\frac{1}{r^{p_0+p_3+p_4}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2+p_3}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2+p_4}} + \frac{1}{r^{p_1+p_3+p_4}} + \frac{1}{r^{p_2+p_3+p_4}}} \\ C_2 &= \frac{1}{\frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2+p_3}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2+p_4}} + \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_3+p_4}} + \frac{1}{r^{p_0+p_2+p_3+p_4}} + \frac{1}{r^{p_1+p_2+p_3+p_4}} +} \\ &\quad \frac{1}{\frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2+p_3+p_4}}} \\ C_1 &= \frac{1}{r^{p_0+p_1+p_2+p_3+p_4}} \\ C_{an,tec} &= (-C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5) \Phi + C_5 \phi_5 - C_4 \phi_4 + C_3 \phi_3 - C_2 \phi_2 + C_1 \phi_1 \end{aligned} \quad (3.63)$$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an,pc}$  em diferenças finitas para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em cinco malhas com refino  $r$ ,  $g-5$ ,  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$  e  $g-1$ .
2. Para os nós coincidentes entre as malhas  $g-5$ ,  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$ ,  $g-1$  e  $g$ , obter diretamente a correção de Richardson dada pela Eq. (3.63) e obter o valor de  $C_{an,pc}$ .
3. Para os nós não coincidentes entre as malhas  $g-4$ ,  $g-3$ ,  $g-2$ ,  $g-1$  e  $g$ , aplicar um determinado grau de interpolação para obter a correção de Richardson.
4. Aplicar a correção de Richardson em todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_6 = \Phi + C_{an,pc}$

O algoritmo para aplicar o método  $\phi_{an,pc}$  em volumes finitos para a malha  $g$  é:

1. Obter a solução numérica em cinco malhas com refino  $r$ ,  $g - 5$ ,  $g - 4$ ,  $g - 3$ ,  $g - 2$  e  $g - 1$ .
2. Para todos os volumes das malhas  $g - 5$ ,  $g - 4$ ,  $g - 3$ ,  $g - 2$ ,  $g - 1$  interpolar e obter a solução em todos os volumes da malha  $g$ .
3. Obter a correção de Richardson dada pela Eq. (3.63) para todos os volumes e aplicar para todos os pontos da malha  $g$  com  $\phi_6 = \Phi + C_{an,pc}$

### 3.5 ERRO DE DISCRETIZAÇÃO, CRITÉRIO DE PARADA DO SISTEMA ITERATIVO E ERRO DE ITERAÇÃO

O comportamento global do erro de discretização foi determinado usando como métrica a média da norma  $L_1$  do erro de discretização, definida pela Eq.(3.64). Isto pois segundo o trabalho de Marchi e Martins (2010), esta variável não sofre degeneração de ordens e acompanha a ordem da solução numérica pontual.

$$L_\phi = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n |\Phi_p - \phi_p| \quad (3.64)$$

Na Eq. (3.64)  $p$  é válido para todos os nós internos do domínio de cálculo, excluindo desta forma as condições de contorno aplicadas.

A parada do sistema iterativo para obter a solução numérica deu-se pela avaliação da média da norma  $L_1$  do resíduo do sistema linear ( $re = Ax^* - b$ ) dado pela Eq. (3.65): quando se atingiu o erro de máquina, é iterado novamente até aproximadamente o dobro do número de iterações.

$$Lr_i = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n |re_p(i)| \quad (3.65)$$

em que  $i$  é o número da iteração,  $p$  é o nó avaliado e  $n$  é o número total de incógnitas do problema.

Após obter a solução exata do problema para todas as malhas, é possível avaliar o comportamento do erro de iteração usando como métrica a média da norma  $L_1$  do erro de iteração verdadeiro, dado pela Eq. (3.66).

$$Li_i = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n |\phi_p^{ex} - \phi_i| \quad (3.66)$$



Para comparação entre solvers, cada problema modelo foi iterado até atingir uma tolerância de  $10^{-10}$  para  $Li_i$ . Para alguns casos este mesmo critério de parada foi utilizado para comparação das estimativas iniciais.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos pela redução do erro de iteração, erro de discretização e para certos casos, a comparação entre os solvers testados em cada uma das equações modelo. Estes resultados são também analisados e discutidos.

Todas as simulações, exceto as malhas  $513^3$  e  $512^3$  nos problemas 3D, foram feitas em um PC com processador 64 bits Intel i7 4790, 3,6GHz com 8 GB de memória RAM rodando sistema operacional Windows 7.

Nas malhas  $513^3$  e  $512^3$  dos problemas 3D foram feitas em um Workstation com 2 processadores 64 bits Intel Xeon X5690 (6 core) 3,46 GHz com 192 GB de memória RAM rodando sistema operacional Windows 7.

O ambiente de programação utilizado é o Visual Studio 2010 Shell e a versão do compilador Intel Parallel Studio XE 2015 Composer Edition for Fortran Windows é a 15.0.0115.2010.

Notando que todos os códigos implementados neste trabalho não são paralelizados, ou seja, rodam em apenas um único núcleo do processador.

### 4.1 LAPLACE 2D DF

Neste problema modelo não foi implementada a metodologia multigrid, pois o código já estava disponível em sua forma singlegrid, embora se aplicado, este seria o problema que mais se beneficiaria do citado método.

As malhas utilizadas foram:  $3^2$ ,  $5^2$ ,  $9^2$ ,  $17^2$ ,  $33^2$ ,  $65^2$ ,  $129^2$ ,  $257^2$ ,  $513^2$ ,  $1025^2$ ,  $2049^2$  e  $4097^2$ . Os resultados gerais das soluções exatas são mostrados na Tab. 4.1.

Na Tab. 4.1 o número de iterações necessárias para satisfazer o critério de convergência começa a aumentar a partir das primeiras malhas até a malha  $65^2$ , isto se deve ao fato de que a estimativa inicial ainda não consegue reduzir o erro de iteração o suficiente.

A partir da malha  $65^2$  o número de iterações começa a reduzir até o valor unitário na malha  $4097^2$ , isto deve-se ao fato que a estimativa inicial começa a reduzir o erro de iteração cada vez mais, chegando próximo ao critério de parada.

Na última malha a estimativa usada foi a Analítica Pentacoeiciente pois esta malha foi resolvida logo após proposição deste método. Esta estimativa apresentou erro de iteração da ordem do erro de máquina da precisão numérica utilizada.

Tabela 4.1 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Laplace 2D DF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}$	RAM (MB)	$t_{CPU}$
$3^2$	Analítico	PDMA	1	1	0	3,7	0,001 s
$5^2$	$\phi_{an}$	PDMA	15	26	$5,6 \times 10^{-34}$	3,8	0,010 s
$9^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	20	36	$3,6 \times 10^{-33}$	3,9	0,008 s
$17^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	23	44	$2,8 \times 10^{-32}$	3,9	0,040 s
$33^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	26	42	$8,6 \times 10^{-34}$	3,9	0,259 s
$65^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	26	42	$2,5 \times 10^{-34}$	4,0	1,979 s
$129^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	24	38	$3,5 \times 10^{-34}$	4,5	14,1 s
$257^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	23	30	$5,0 \times 10^{-34}$	6,1	1,6 min
$513^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	17	22	$7,0 \times 10^{-34}$	12,6	9,0 min
$1025^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	11	14	$9,9 \times 10^{-34}$	37,1	42,6 min
$2049^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	6	8	$1,6 \times 10^{-33}$	529,8	3,3 h
$4097^2$	$\phi_{an,pc}$	PDMA	1	2	$2,0 \times 10^{-34}$	2106,8	1,6 min

em que: N é o número de nós total da malha, CI é a condição inicial aplicada, o Solver utilizado está na coluna correspondente, it(Ei) é a iteração na qual se obteve erro de máquina da precisão quádrupla, itmax é o número máximo de iterações aplicado,  $\overline{L}_{1r}$  é a média da norma  $L_1$  do resíduo do sistema linear a cada iteração, RAM é a memória RAM utilizada pelo código em MegaBytes e  $t_{CPU}$  é o tempo de CPU utilizado pelo código para a convergência.

#### 4.1.1 Solvers

Lembrando que para analisar os diferentes solvers utilizados, a parada do sistema iterativo foi dada quando se atingiu  $10^{-10}$  para  $Li_i$  da Eq. (3.66). A Fig. 4.1 mostra o comportamento do tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha ao variar o tipo de solver. A estimativa inicial foi a nula, embora o comportamento do tempo de CPU em função do solver se mantenha para todas as demais estimativas iniciais.

A Fig. 4.1 mostra que o solver PDMA é o mais rápido neste caso, seguido pelo MSI, Gauss-Seidel e o ADI.

#### 4.1.2 Erro de iteração

A Fig. 4.2 mostra o comportamento de  $Li_0$ , o erro de iteração da estimativa inicial, e a sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para as diferentes estimativas iniciais aplicadas.

A ordem de acurácia na estimativa inicial da Fig. 4.2 se relaciona com a taxa de redução do erro de iteração verdadeiro em função do tamanho de malha utilizado. Notando que o máximo grau de interpolação usado foi de  $15^\circ$ , sua análise detalhada é:

- A estimativa nula é sempre a mesma independente do tamanho de malha utilizado, portanto apresenta ordem de acurácia tendendo a zero.

Figura 4.1 – Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para diferentes solvers na estimativa inicial nula - Laplace 2D DF.

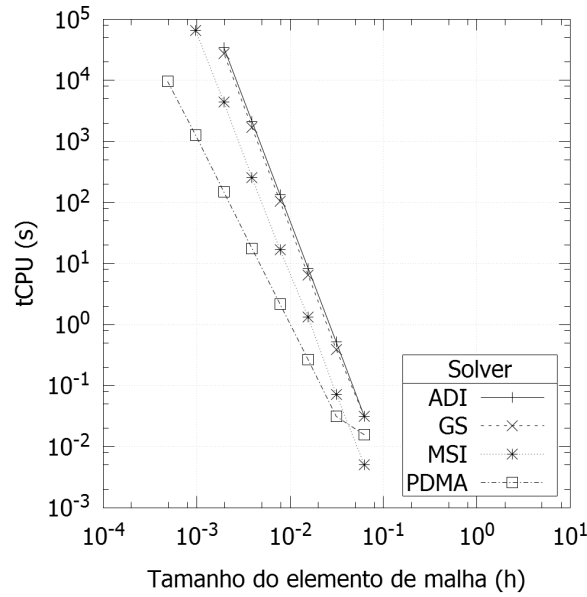
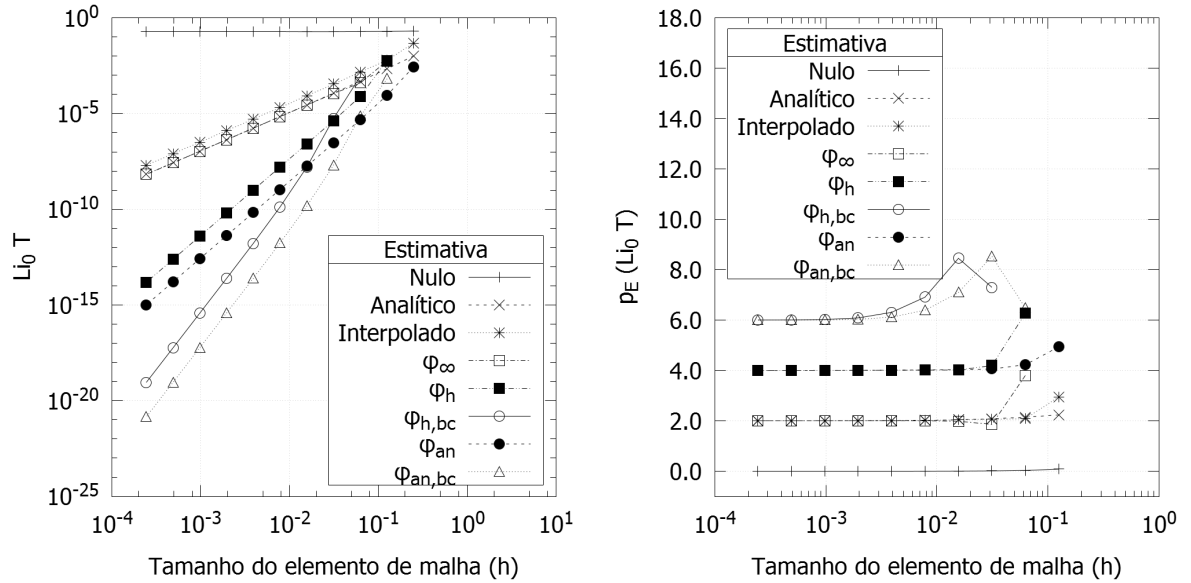


Figura 4.2 – Comparação de  $Li_0$  (esquerda) e suas ordens de acurácia (direita) em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Laplace 2D DF.



- As estimativas interpolada, analítica e  $\phi_\infty$  apresentam ordem de acurácia semelhante entre si e igual à ordem verdadeira da aproximação utilizada, no caso 2ª ordem. O motivo pelo qual a estimativa  $\phi_\infty$  resultar em 2ª ordem ao invés de 4ª é que esta é uma boa estimativa para a solução analítica do problema, mas não para a solução numérica.
- As estimativas  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  apresentam ordem de acurácia semelhante entre si e igual à segunda ordem verdadeira da aproximação utilizada, no caso 4ª ordem. Mesmo apresentando ordens de acurácia semelhantes, a estimativa inicial que fornece menor

erro de iteração é a  $\phi_{an}$ , embora esta necessite da solução analítica do problema.

- A mesma análise apresentada no item anterior vale para as estimativas  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$  as quais apresentam 6ª ordem de acurácia (terceira ordem verdadeira da aproximação utilizada).
- Quanto mais termos do erro de discretização forem utilizados no método de estimativa inicial, menor será o erro de iteração na estimativa inicial conforme a malha é refinada. Comparando as estimativas  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  e também as estimativas  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$ , a primeira possui um único termo de erro de discretização na estimativa inicial e a segunda apresenta dois termos.
- Há certas malhas em que os métodos de estimativa inicial de maior ordem de acurácia não apresentam ganho em relação aos de menor ordem de acurácia.

Por exemplo, na Fig. 4.2 comparando o caso da estimativa  $\phi_{an,bc}$  e  $\phi_{an}$  no tamanho de malha 6,  $25 \cdot 10^{-2}$  ou  $17^2$  nós, nesta malha a estimativa que gera o menor erro de iteração é a  $\phi_{an}$ .

Uma justificativa seria o número limitado de pontos de correção nesta malha que são utilizados na interpolação: este método necessita de duas malhas anteriores, sendo esta malha com  $17^2$  nós, isto significa que é necessário a malha com  $9^2$  nós e a com  $5^2$  nós.

Haverá apenas  $5^2$  nós coincidentes sendo possível interpolar no máximo uma função de 4ª ordem para a correção, mas a estimativa inicial em si apresenta 6ª ordem de acurácia. Como há redução na ordem da correção para os pontos interpolados haverá então uma redução na ordem de acurácia do campo de soluções como um todo.

Baseando-se na análise citada, pode ser possível, ao aumentar o número de termos no erro de discretização, obter estimativas iniciais cada vez mais acuradas.

Para estudar esse comportamento foi analisado o uso de até cinco malhas para obter mais termos no erro de discretização e melhorar a estimativa inicial, conforme está mostrado na Fig. 4.3, para os métodos sem a solução analítica ( $\phi_h$ ) e com a solução analítica ( $\phi_{an}$ ) respectivamente, e as ordens de acurácia dos citados métodos estão na Fig. 4.4. Nas figuras, as siglas significam: bc: bicoeficiente, trc: tricoeficiente, tec: tetracoeficiente e pc: pentacoeficiente.

Importante notar nas Figs. 4.3 e 4.4 que o método Analítico Pentacoeficiente apresenta na última malha ordem efetiva com grande redução até que começa a oscilar e a variável  $Li_0$  tende a estagnar, isto se deve ao fato que o erro de iteração é tão pequeno a ponto de que o erro de arredondamento da precisão utilizada ( $\approx 10^{-32}$  para precisão quádrupla) começa a influenciar nos resultados. O método utilizado de estimativa inicial que é baseado na extrapolação de Richardson falha em reduzir este tipo de erro.

Figura 4.3 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  (esquerda) e  $\phi_{an}$  (direita) - Laplace 2D DF.

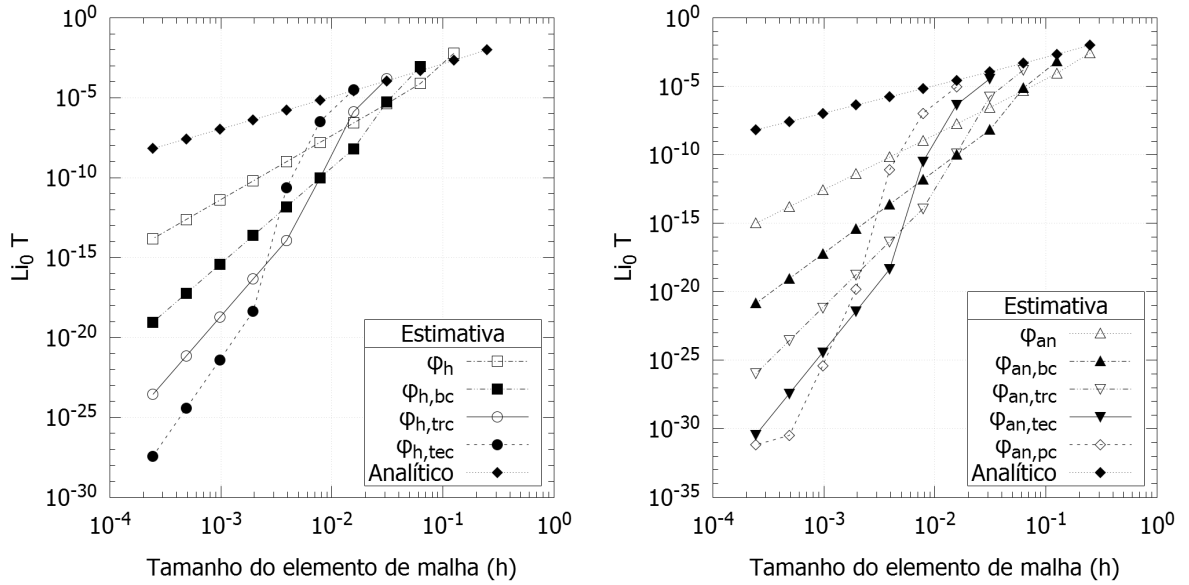
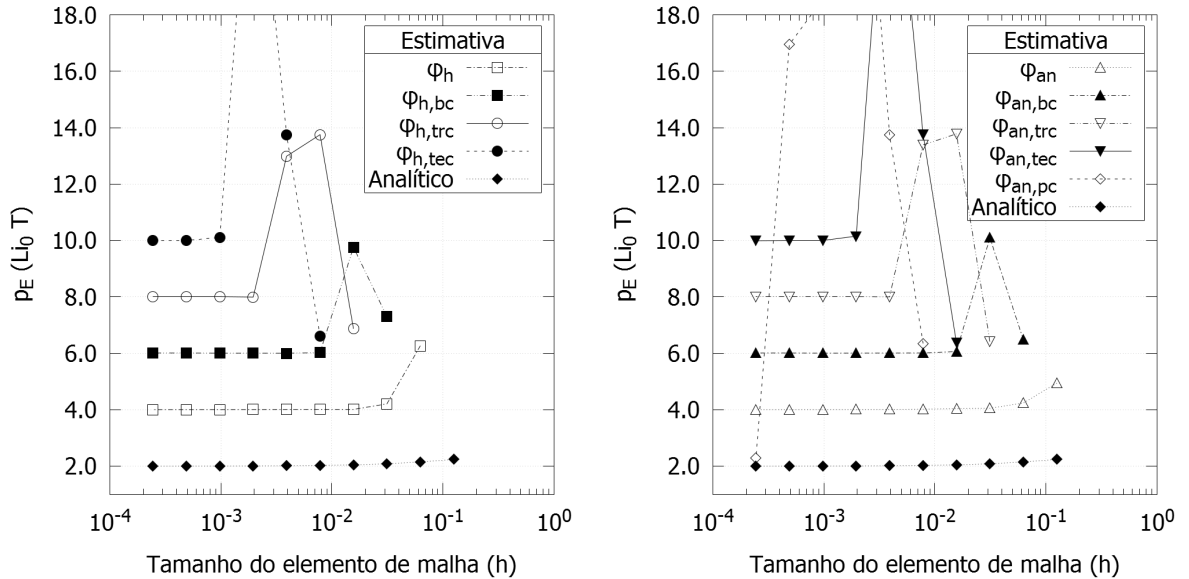


Figura 4.4 – Ordem efetiva de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  (esquerda) e  $\phi_{an}$  (direita) - Laplace 2D DF.



Estas reduções de  $Li_0$  devem também reduzir o tempo de processamento da simulação. Esta análise é feita para o solver MSI iterando até uma tolerância novamente de  $10^{-10}$  para  $Li_0$ , como mostra a Fig. 4.5. Ao fazer uma regressão dos dados mostrados na Fig. 4.5 para a equação empírica de tempo de CPU dado pela Eq. (2.21) obtém-se a Tab. 4.2.

Os tempos de CPU foram calculados da seguinte maneira: em cada método e em cada malha mostradas, o tempo de CPU soma os tempos das malhas necessárias resolvidas

Figura 4.5 – Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para o solver MSI com as diferentes estimativas iniciais - Laplace 2D DF.

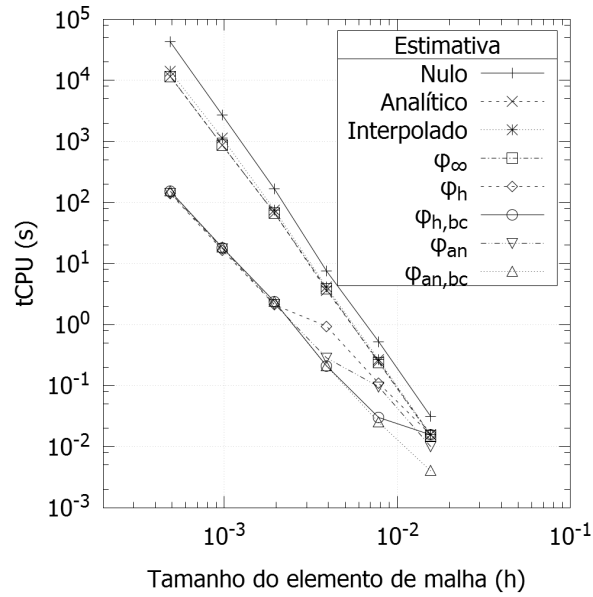


Tabela 4.2 – Coeficientes da Eq. (2.21) - Laplace 2D DF.

Estimativa	k	p	$r_{quad}$
Nulo	$6,513 \times 10^{-8}$	1,995	1,000
Analítico	$8,277 \times 10^{-8}$	1,894	1,000
Interpolado	$1,119 \times 10^{-7}$	1,887	1,000
$\phi_{\infty}$	$8,564 \times 10^{-8}$	1,899	1,000
$\phi_h$	$3,768 \times 10^{-6}$	1,311	0,894
$\phi_{h,bc}$	$1,336 \times 10^{-4}$	0,855	0,994
$\phi_{an}$	$5,435 \times 10^{-5}$	0,972	0,934
$\phi_{an,bc}$	$1,964 \times 10^{-5}$	0,959	1,000

em que:  $r_{quad}$  é o coeficiente de determinação, uma medida de ajuste da regressão linear em relação aos dados utilizados. Quanto mais próximo da unidade melhor o modelo pode explicar os valores observados.

anteriormente e pelo menos uma iteração da atual. Por exemplo, na malha  $2049^2$  o método Analítico Bicoeficiente soma o tempo de CPU de uma iteração nesta malha como também os tempos utilizados nas malhas  $1025^2$  e  $513^2$  no mesmo método.

#### 4.1.3 Erro de discretização

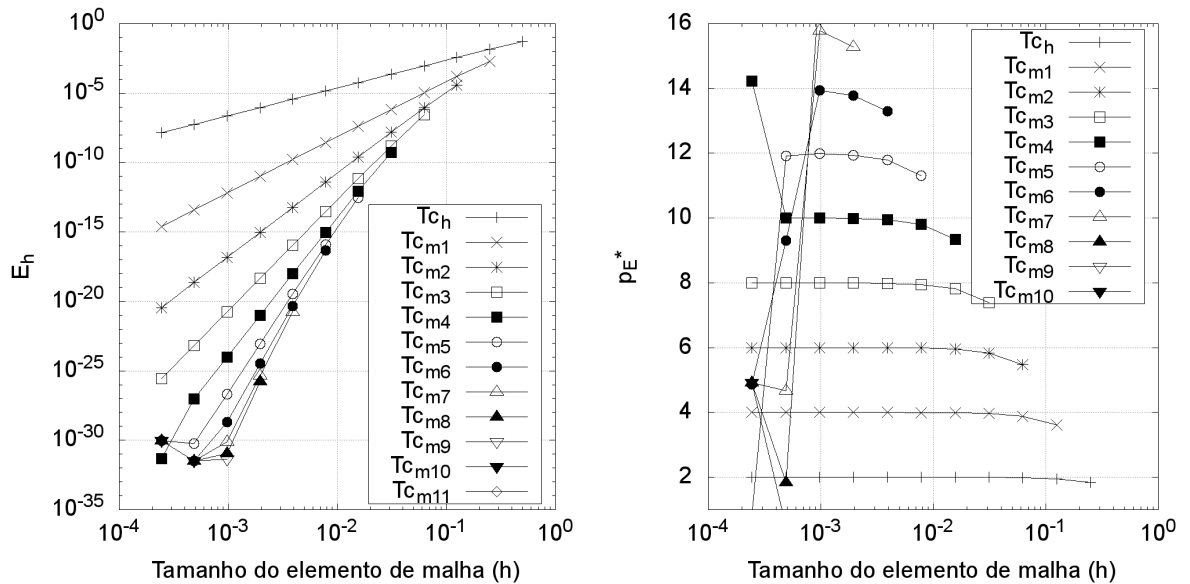
Duas formas de redução do erro de discretização foram utilizadas: a primeira refere-se às múltiplas extrapolações de Richardson para variáveis globais ou pontuais como explicado na seção 2.4.2 e a segunda é o método CRE para redução do erro de discretização em todo o campo de soluções como explicado na seção 2.4.3, a diferença foi a interpolação de grau elevado (até  $15^a$ ) para os pontos não coincidentes entre as malhas (seção 3.2).

Nas malhas em que não havia pontos suficientes para interpolar utilizando um grau mais elevado, o máximo possível foi utilizado.

Na primeira forma, as três variáveis analisadas  $T_c$ ,  $T_m$  e  $Q_e$  apresentaram o comportamento esperado no caso das múltiplas extrapolações de Richardson: a cada nível de extrapolação a ordem de acurácia aumentou de acordo com a progressão aritmética das ordens verdadeiras da aproximação utilizada, no caso CDS, 2, 4, 6 ... até que o erro de arredondamento se tornasse mais significativo que o erro de discretização.

O comportamento esperado como indicado acima pode ser analisado na Fig. 4.6 para a variável  $E_h$  e  $p_E^*$ ; apenas a variável  $T_c$  é mostrada aqui, no Apêndice A estão as demais figuras.

Figura 4.6 – Erro de discretização da variável  $T_c$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D DF.



Na Fig. 4.6 o sub índice 'h' faz referência a variável obtida diretamente da solução numérica, e os subíndices 'm+número' fazem referência ao nível de extrapolação utilizado.

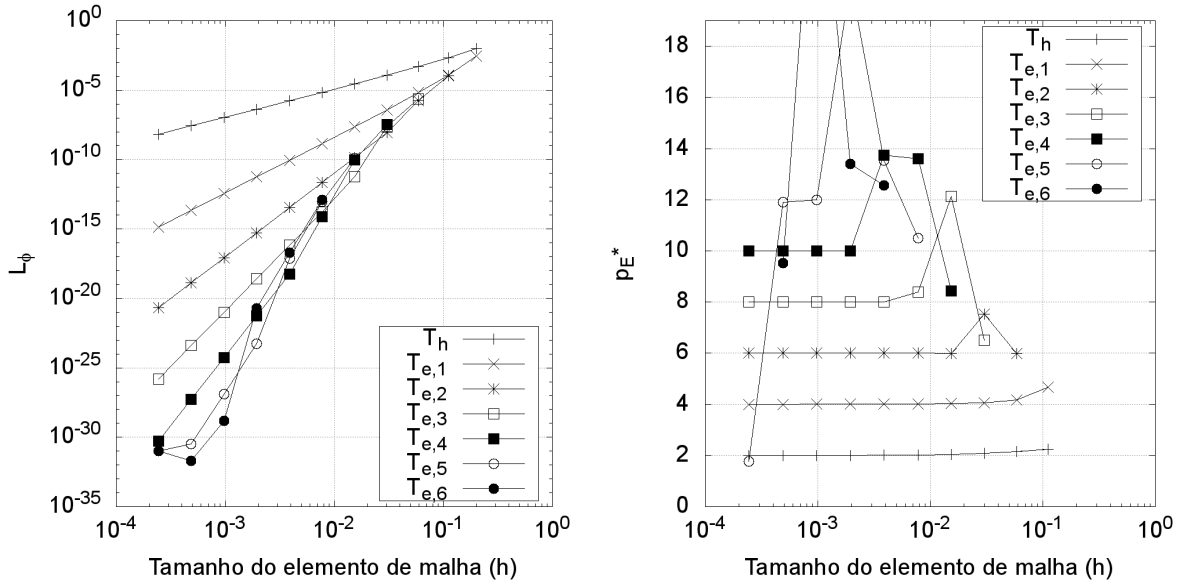
Importante ainda é notar na Fig. 4.6 que em determinadas situações de malha e extrapolação utilizada atinge-se o erro de arredondamento da precisão aplicada, nestas condições as múltiplas extrapolações de Richardson falham em reduzir este tipo de erro.

Na segunda forma, o método CRE foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado a métrica  $L_\phi$  (Eq. (3.64)) na Fig. 4.7. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 14 na malha  $513^2$  na extrapolação 6 e um erro mínimo de  $2,1 \times 10^{-32}$  na malha  $2049^2$  na extrapolação 6.

Na Fig. 4.7 o subíndice 'h' faz referência a variável obtida diretamente da solução numérica, e os subíndices 'e,número' fazem referência ao nível de extrapolação em campo



Figura 4.7 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D DF.



utilizado.

Com testes feitos para este trabalho comparou-se diferentes tipos de interpolação para a correção (Eq. (2.17)) nos pontos não coincidentes entre malhas consecutivas em MDF.

O resultado da análise é a seguinte: a ordem de acurácia máxima ( $p_{max}$ ) depende do grau de interpolação aplicado seguindo a relação empírica:  $p_{max} = p_0 + d_i$ , onde  $d_i$  é o grau de interpolação do polinômio.

Por exemplo: aplicando-se aproximação CDS a qual apresenta 2ª ordem de acurácia e utilizando uma interpolação linear para a correção, a qual apresenta também 2ª ordem de acurácia, obtém-se, ao realizar as extrapolações sucessivas, uma ordem de acurácia máxima de 4ª ordem independente do nível de extrapolação que se atinja.

## 4.2 LAPLACE 2D VF

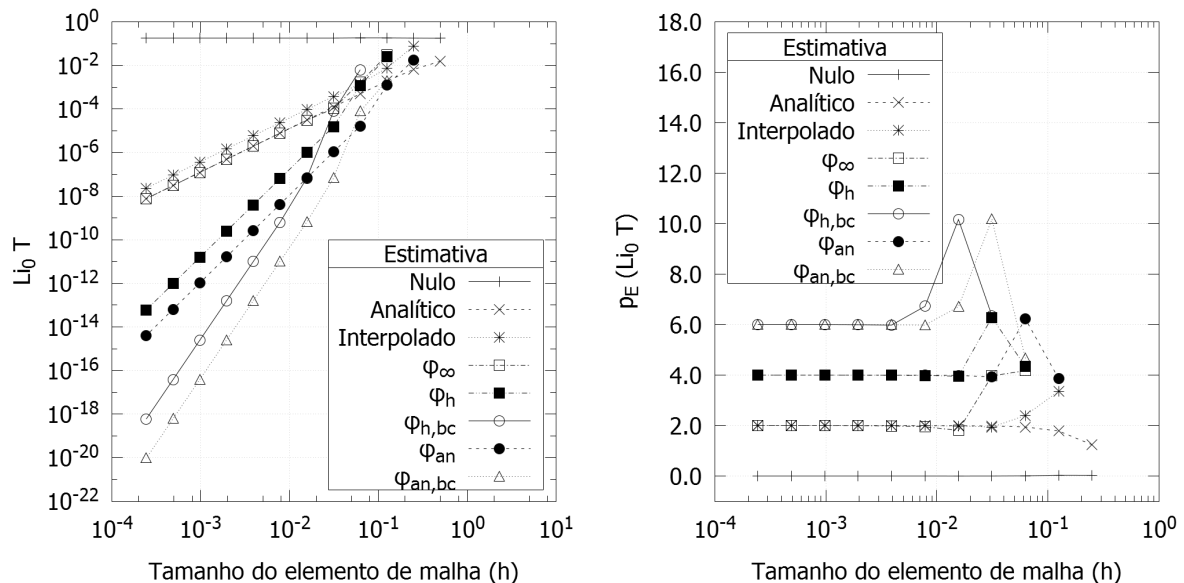
Já no problema modelo utilizando volumes finitos foi implementada a metodologia multigrid. As malhas utilizadas foram:  $2^2$ ,  $4^2$ ,  $8^2$ ,  $16^2$ ,  $32^2$ ,  $64^2$ ,  $128^2$ ,  $256^2$ ,  $512^2$ ,  $1024^2$ ,  $2048^2$  e  $4096^2$ . O solver utilizado foi: Gauss-Seidel com metodologia multigrid de correções aditivas com ponderação sobre a correção. Os resultados gerais das soluções exatas estão na Tab. 4.3, neste caso foram obtidos os resultados numéricos exatos de cada um dos tamanhos de problema.

Tabela 4.3 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Laplace 2D VF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1,r}$	RAM (MB)	tCPU
$2^2$	Analítico	GS MGCA	115	209	$7,2 \times 10^{-36}$	6,3	0,049 s
$4^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	46	83	$3,9 \times 10^{-36}$	6,4	0,014 s
$8^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	42	77	$6,0 \times 10^{-36}$	6,4	0,020 s
$16^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	37	69	$8,8 \times 10^{-36}$	6,5	0,031 s
$32^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	38	71	$9,0 \times 10^{-36}$	6,6	0,092 s
$64^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	39	71	$8,6 \times 10^{-36}$	7,2	0,310 s
$128^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	40	69	$8,9 \times 10^{-36}$	9,7	1,09 s
$256^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	40	69	$9,0 \times 10^{-36}$	16,7	4,11 s
$512^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	42	69	$9,0 \times 10^{-36}$	45,6	16,1 s
$1024^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	45	75	$9,0 \times 10^{-36}$	160,7	1,2 min
$2048^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	50	77	$9,0 \times 10^{-36}$	621,3	4,8 min
$4096^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	52	77	$9,0 \times 10^{-36}$	2461,7	18,9 min

#### 4.2.1 Erro de iteração

A Fig. 4.8 mostra o comportamento da  $Li_0$  e a sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada. A ordem de acurácia aqui significa a taxa de redução do erro de iteração verdadeiro da estimativa inicial em função do tamanho de malha utilizado. Notando que para cada forma de estimativa inicial foram utilizados os algoritmos dados pela seção 3.4 e o grau das interpolações utilizadas foram de até  $15^a$ ; em malhas em que o número de pontos era insuficiente, a máxima ordem dada pelos pontos disponíveis foi aplicada.

Figura 4.8 – Comparação de  $Li_0$  (esquerda) e sua ordem efetiva (direita) em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Laplace 2D VF.

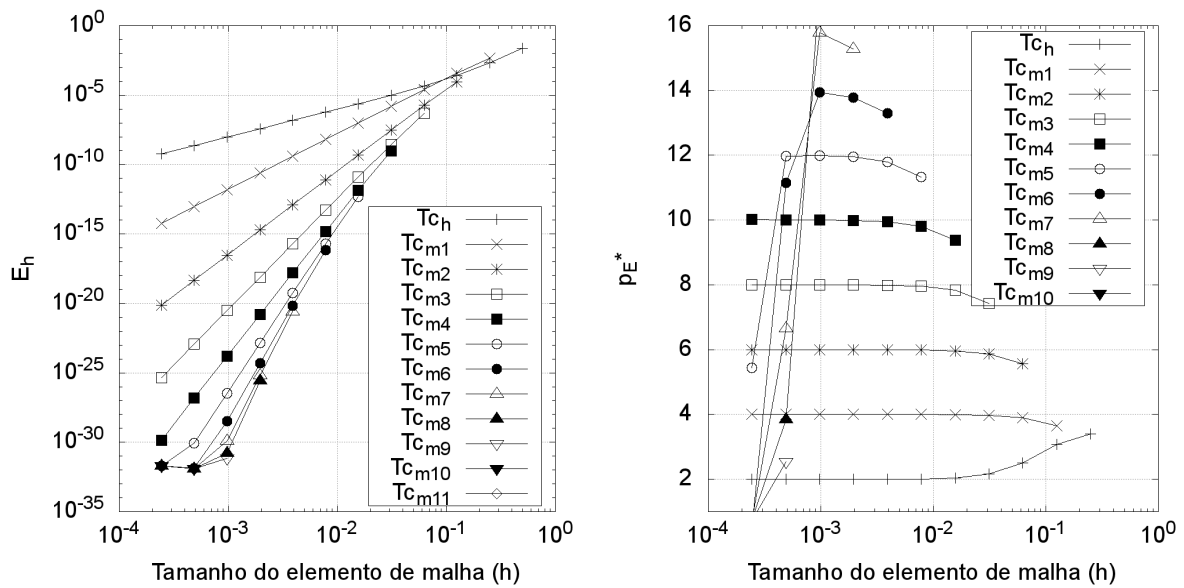
Por ser análogo ao aplicado nos casos em diferenças finitas, os métodos que utilizam

maior número de termos no erro para a estimativa inicial não são mostrados para os casos em volumes finitos.

### 4.2.2 Erro de discretização

As três variáveis analisadas  $T_c$ ,  $T_m$  e  $Q_e$  apresentaram o comportamento esperado no caso das múltiplas extrapolações de Richardson. Assim apenas a variável  $T_c$  é mostrada na Fig. 4.9; no Apêndice A estão as demais figuras.

Figura 4.9 – Erro de discretização da variável  $T_c$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D VF.



O método CRE foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.10. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 12 na malha  $1024^2$  na extrapolação 6 e um erro mínimo de  $6,6 \times 10^{-33}$  na malha  $4096^2$  na extrapolação 5.

## 4.3 ADVECÇÃO-DIFUSÃO 2D DF

Neste problema modelo não foi implementada a metodologia multigrid. As malhas utilizadas foram:  $3^2$ ,  $5^2$ ,  $9^2$ ,  $17^2$ ,  $33^2$ ,  $65^2$ ,  $129^2$ ,  $257^2$ ,  $513^2$ ,  $1025^2$ ,  $2049^2$  e  $4097^2$ . Os resultados gerais das soluções exatas são mostrados na Tab. 4.4.

### 4.3.1 Solvers

Os solvers utilizados foram: Gauss-Seidel, MSI e PDMA. A Fig. 4.11 mostra o comportamento do tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha ao variar o tipo de solver aplicado para a estimativa inicial nula. O comportamento do tempo de

Figura 4.10 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D VF.

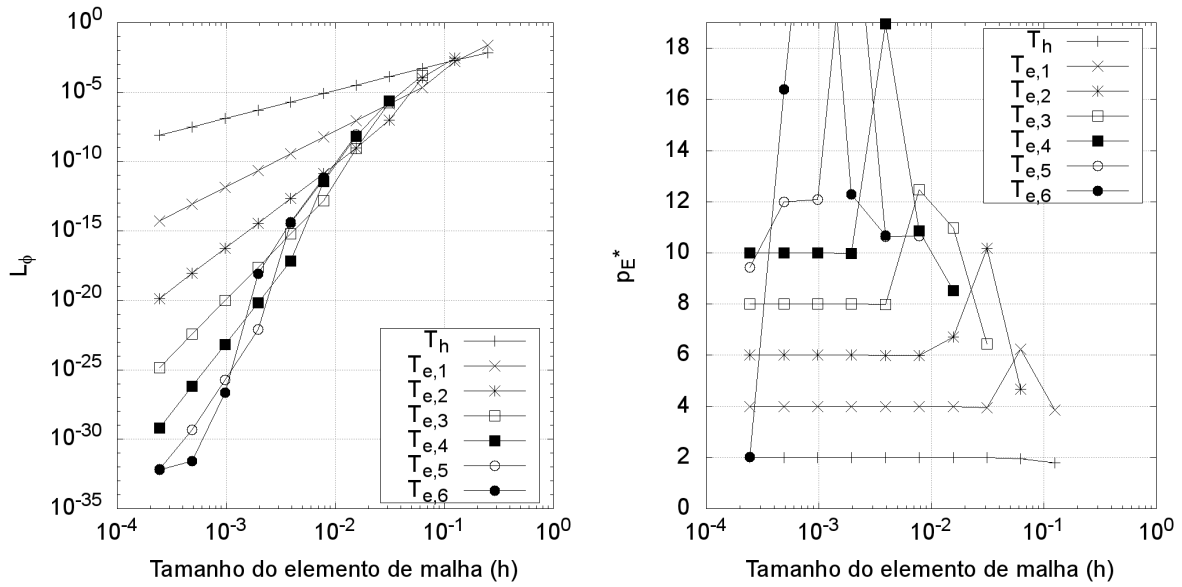


Tabela 4.4 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Advecção-Difusão 2D DF.

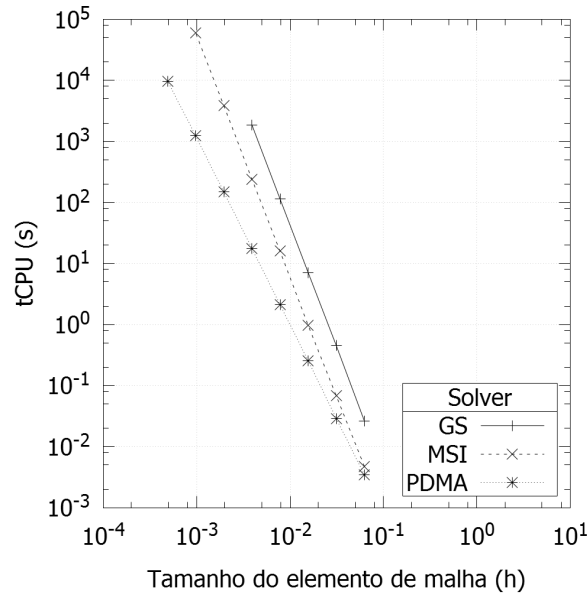
N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}$	RAM (MB)	tCPU
$3^2$	Analítico	PDMA	1	1	0	6,3	0,000 s
$5^2$	Analítico	PDMA	14	23	$4,8 \times 10^{-33}$	6,4	0,000 s
$9^2$	Analítico	PDMA	18	31	$5,2 \times 10^{-33}$	6,4	0,003 s
$17^2$	Analítico	PDMA	22	37	$3,5 \times 10^{-33}$	6,5	0,034 s
$33^2$	Analítico	PDMA	24	39	$2,3 \times 10^{-33}$	6,6	0,281 s
$65^2$	Analítico	PDMA	25	41	$1,6 \times 10^{-33}$	7,2	2,30 s
$129^2$	Analítico	PDMA	25	41	$1,2 \times 10^{-33}$	9,7	17,9 s
$257^2$	Analítico	PDMA	25	41	$9,7 \times 10^{-34}$	16,7	2,4 min
$513^2$	Analítico	PDMA	24	39	$8,7 \times 10^{-34}$	45,6	17,3 min
$1025^2$	Analítico	PDMA	23	37	$8,3 \times 10^{-34}$	160,7	2,15 h
$2049^2$	Analítico	PDMA	22	41	$8,0 \times 10^{-34}$	754,3	19,6 h
$4097^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	11	13	$2,6 \times 10^{-35}$	2102,9	2,2 dias

CPU em função do solver se mantém para todas as outras estimativas iniciais, ou seja, o solver PDMA é mais rápido do que o MSI seguido pelo Gauss-Seidel.

### 4.3.2 Erro de iteração

A Fig. 4.12 mostra o comportamento de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada. A análise das Fig. 4.12 são similares à da seção 4.1.2. O comportamento das estimativas iniciais sem solução analítica (subíndice h) e com solução analítica (subíndice an) estão presentes na Fig. 4.13 e as ordens efetivas estão na Fig. 4.14, respectivamente. Nota-se no entanto na Fig. 4.14 que

Figura 4.11 – Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para diferentes solvers na estimativa inicial nula - Advecção-Difusão 2D DF.



a máxima ordem efetiva obtida é de 6, ou seja, não há ganho algum em utilizar estimativas iniciais que considerem mais termos no erro de discretização a partir de  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$ .

O motivo do limite de acurácia obtida ainda é objeto de estudo, embora nestes casos nota-se que o campo de erro de discretização apresenta oscilações advindas dos contornos, estas oscilações não são captadas pelo método de extrapolação em campo e não são reduzidas, mantendo assim a ordem efetiva obtida na ordem em que a oscilação foi observada.

Figura 4.12 – Comparação de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão 2D DF.

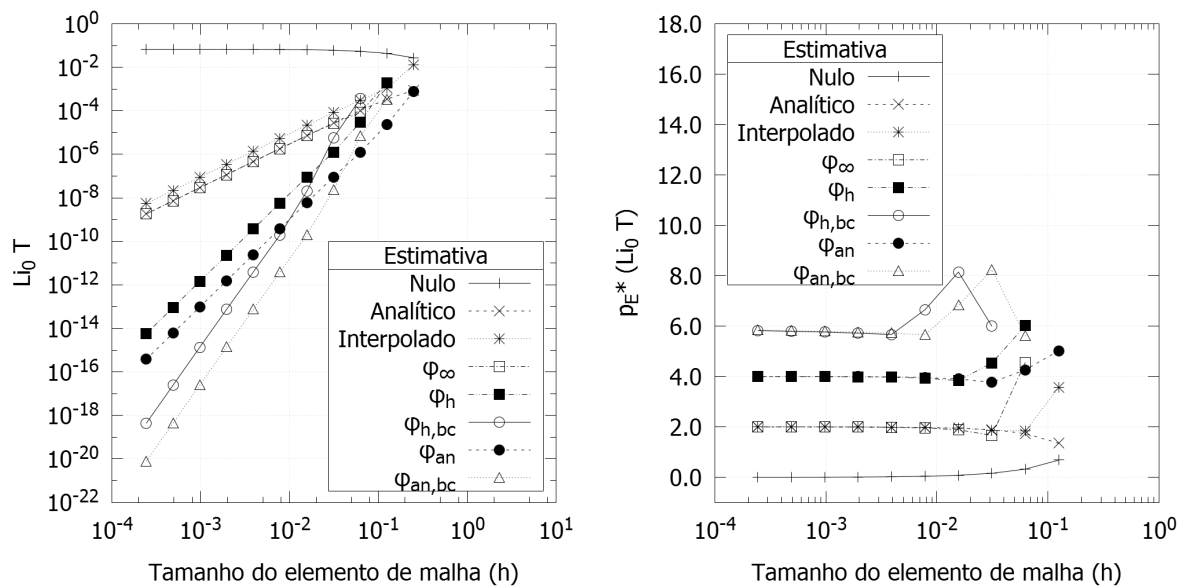


Figura 4.13 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  - Advecção-Difusão 2D DF.

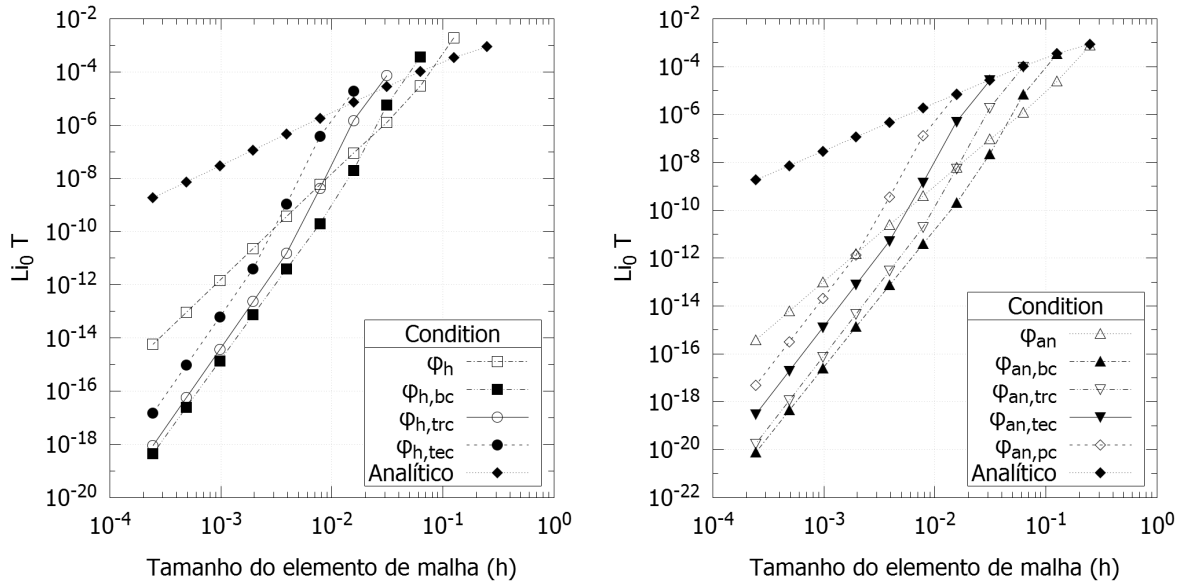
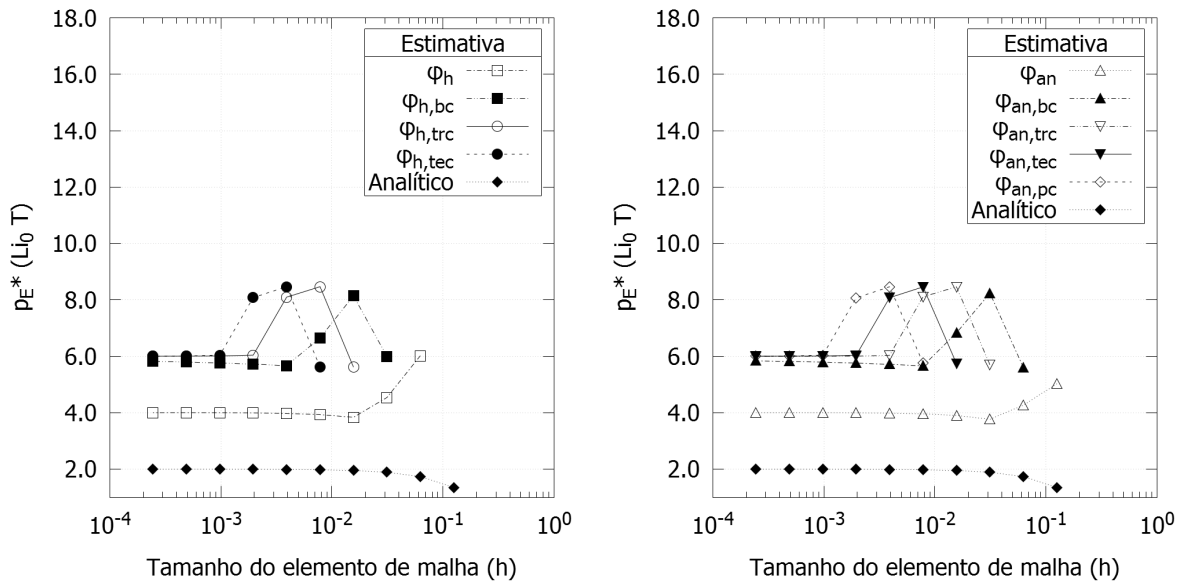


Figura 4.14 – Ordem efetiva de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  (esquerda) e  $\phi_{an}$  (direita) - Advecção-Difusão 2D DF.



A redução no tempo de processamento da simulação como o solver MSI é mostrada na Fig. 4.15.

Ao fazer uma regressão linear na base logarítmica dos dados mostrados na Fig. 4.15 para a equação empírica de tempo de CPU dado pela Eq. (2.21) obtém-se a Tab. 4.5.

Figura 4.15 – Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para o solver MSI com as diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão 2D DF.

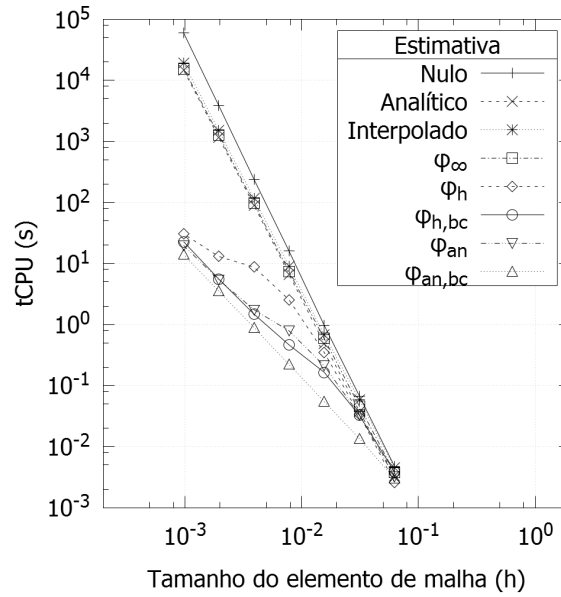


Tabela 4.5 – Coeficientes da Eq. (2.21) - Advecção-Difusão 2D DF.

Estimativa	k	p	$r_{quad}$
Nulo	$5,866 \times 10^{-8}$	1,995	1,000
Analítico	$8,033 \times 10^{-8}$	1,873	1,000
Interpolado	$1,251 \times 10^{-7}$	1,859	1,000
$\phi_\infty$	$1,036 \times 10^{-7}$	1,859	1,000
$\phi_h$	$1,428 \times 10^{-5}$	1,126	0,929
$\phi_{h,bc}$	$2,291 \times 10^{-5}$	1,004	0,987
$\phi_{an}$	$2,532 \times 10^{-5}$	1,003	0,969
$\phi_{an,bc}$	$1,006 \times 10^{-5}$	1,024	1,000

### 4.3.3 Erro de discretização

Com o uso de MER, das duas variáveis analisadas  $T_c$  e  $T_m$ , apenas a variável  $T_c$  apresentou o comportamento esperado, como pode ser analisado na Fig. 4.16. Já a variável  $T_m$  apresentou um limite de até 6ª ordem de acurácia como pode ser analisado na Fig. 4.17.

Novamente o limite na ordem de acurácia admite explicação provável como citado na seção 4.3.2.

No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.18. Novamente se percebe um limite de até 6ª ordem de acurácia. Foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 6 para todas as demais extrapolações a partir da 2ª e um erro mínimo de  $1,2 \times 10^{-21}$  na malha 4097<sup>2</sup> a partir da extrapolação 4.

Figura 4.16 – Erro de discretização da variável  $T_c$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D DF.

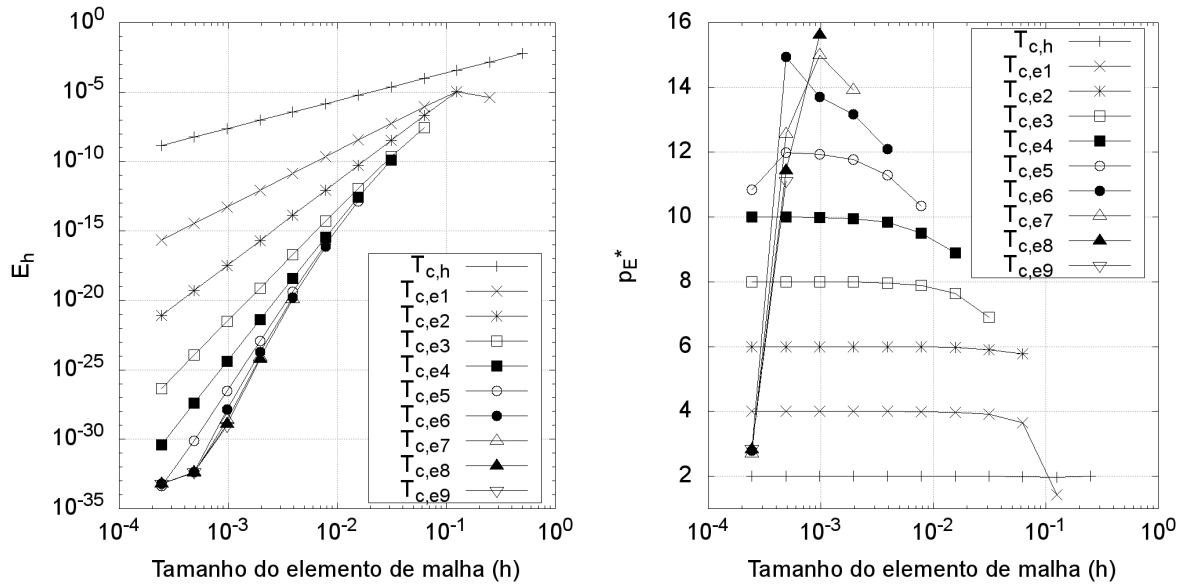
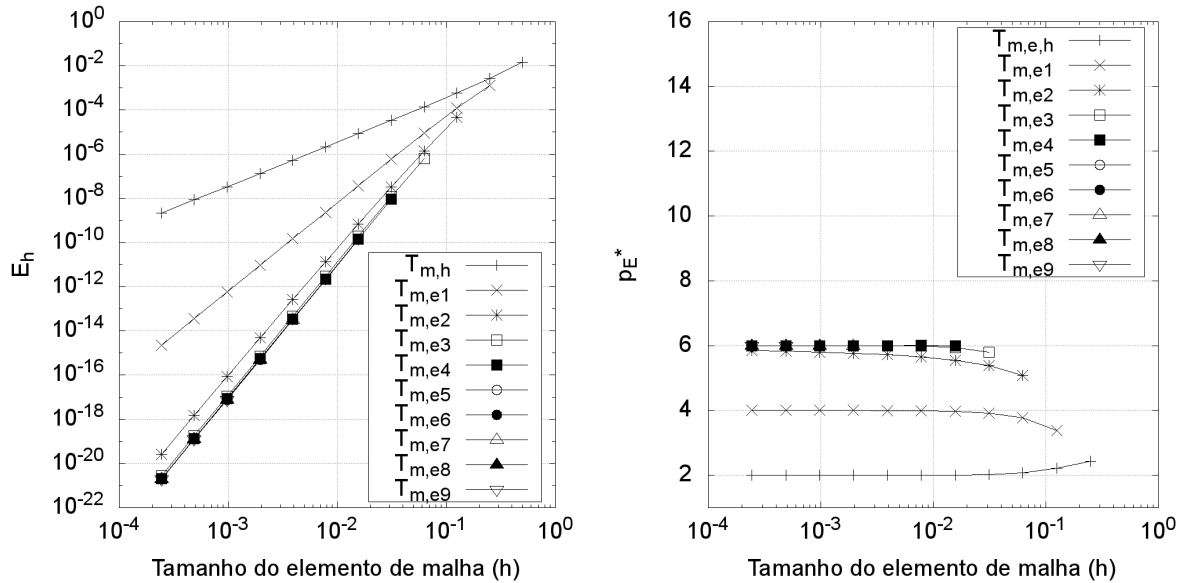


Figura 4.17 – Erro de discretização da variável  $T_m$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D DF.



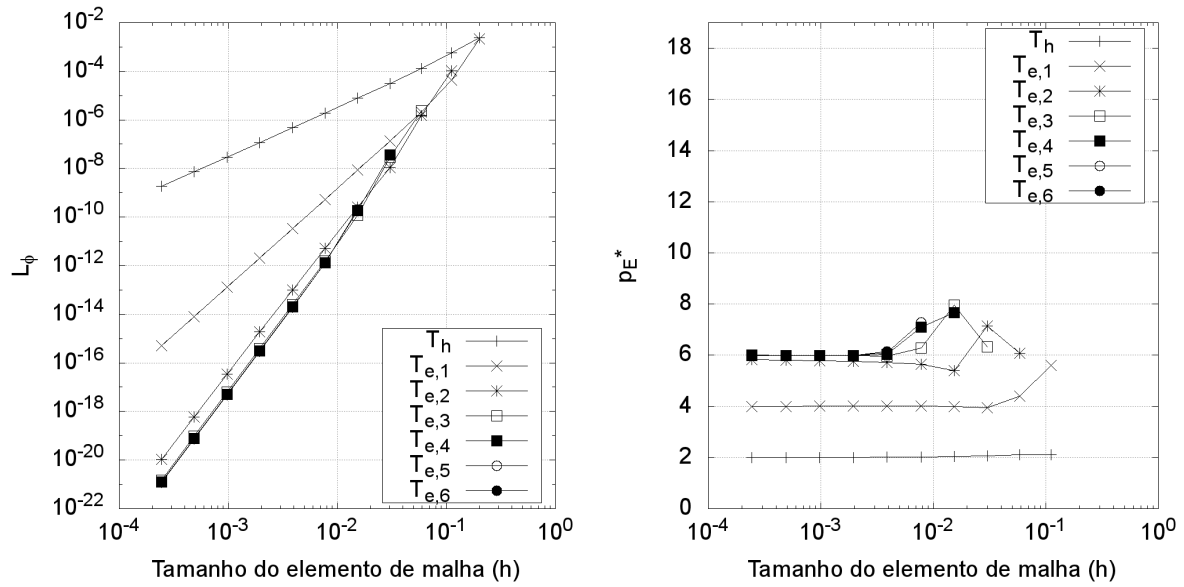
## 4.4 ADVECÇÃO-DIFUSÃO 2D VF

Já no problema modelo utilizando volumes finitos foi implementada a metodologia multigrid e as malhas utilizadas foram:  $2^2$ ,  $4^2$ ,  $8^2$ ,  $16^2$ ,  $32^2$ ,  $64^2$ ,  $128^2$ ,  $256^2$ ,  $512^2$ ,  $1024^2$ ,  $2048^2$  e  $4096^2$ .

O solver utilizado foi Gauss-Seidel com metodologia multigrid de correções aditivas com ponderação sobre a correção. Os resultados gerais das soluções exatas estão na Tab. 4.6. Neste caso foram obtidos os resultados numéricos exatos de cada um dos tamanhos de



Figura 4.18 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D DF.



problema.

Tabela 4.6 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Advecção-Difusão 2D VF.

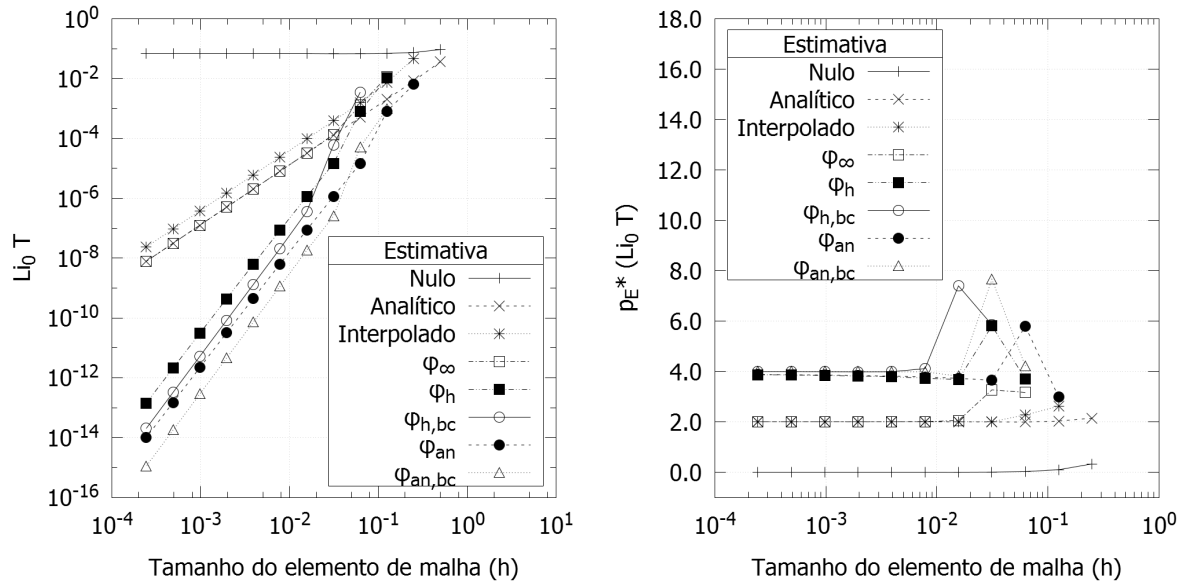
N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1,r}$	RAM (MB)	tCPU
$2^2$	Analítico	GS MGCA	114	213	$2,5 \times 10^{-36}$	6,4	0,328 s
$4^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	43	81	$3,6 \times 10^{-36}$	6,4	0,000 s
$8^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	45	83	$2,5 \times 10^{-36}$	6,4	0,062 s
$16^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	39	71	$3,6 \times 10^{-36}$	6,5	0,062 s
$32^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	40	73	$3,8 \times 10^{-36}$	6,6	0,156 s
$64^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	43	77	$4,1 \times 10^{-36}$	7,2	0,390 s
$128^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	46	81	$4,2 \times 10^{-36}$	9,4	1,50 s
$256^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	49	85	$4,3 \times 10^{-36}$	16,6	6,24 s
$512^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	51	87	$4,2 \times 10^{-36}$	45,3	24,3 s
$1024^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	60	101	$4,3 \times 10^{-36}$	160,7	1,9 min
$2048^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	71	115	$4,3 \times 10^{-36}$	621,3	8,4 min
$4096^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	81	127	$4,3 \times 10^{-36}$	2461,7	36,0 min

#### 4.4.1 Erro de iteração

A Fig. 4.19 mostra  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada.

Como também notado no caso de diferenças finitas na Fig. 4.14 há uma máxima ordem efetiva que pode ser obtida, porém, em volumes finitos (Fig. 4.19) foi obtido no máximo ordem 4. Desta forma, não há ganho algum em utilizar estimativas iniciais que

Figura 4.19 – Comparação de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão 2D VF.



considerem mais termos no erro de discretização a partir de  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$ , exceto talvez pelo menor valor apresentado por  $Li_0$ .

#### 4.4.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, das duas variáveis analisadas  $T_c$  e  $T_m$ , apenas a variável  $T_c$  apresentou o comportamento esperado, como pode ser analisado na Fig. 4.20. Já a variável  $T_m$  apresentou um limite de até 5ª ordem de acurácia como pode ser analisado na Fig. 4.21, o que não seria o esperado como foi aplicado diferenças centrais, as ordens esperadas deveriam ser todas pares.

No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.22. Há um limite de até 4ª ordem de acurácia. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 4 para todas as demais extrapolações a partir da 1ª e um erro mínimo de  $1,5 \times 10^{-15}$  na malha  $4096^2$  a partir da extrapolação 2.

### 4.5 ADVECÇÃO-DIFUSÃO 2D MODIFICADO DF

Esta modificação foi aplicada apenas para constatar se o termo fonte teria algum efeito nos limites de acurácia obtidos com ambos métodos de discretização: diferenças finitas e volumes finitos.

Neste problema modelo não foi implementada a metodologia multigrid. As malhas utilizadas foram:  $3^2$ ,  $5^2$ ,  $9^2$ ,  $17^2$ ,  $33^2$ ,  $65^2$ ,  $129^2$ ,  $257^2$ ,  $513^2$ ,  $1025^2$ ,  $2049^2$  e  $4097^2$ . Os

Figura 4.20 – Erro de discretização da variável  $T_c$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D VF.

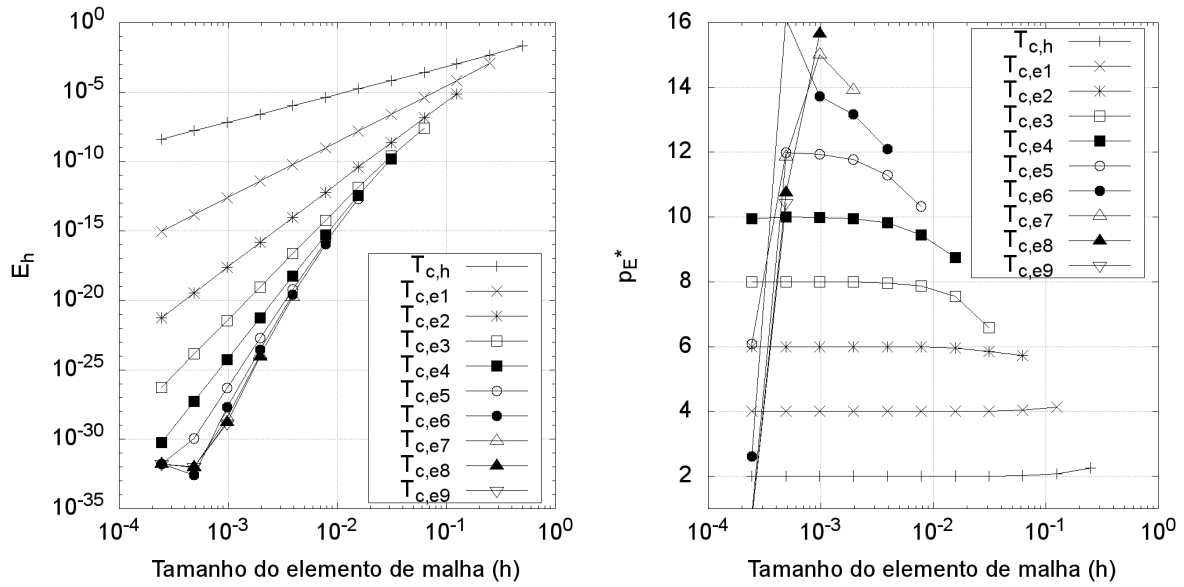
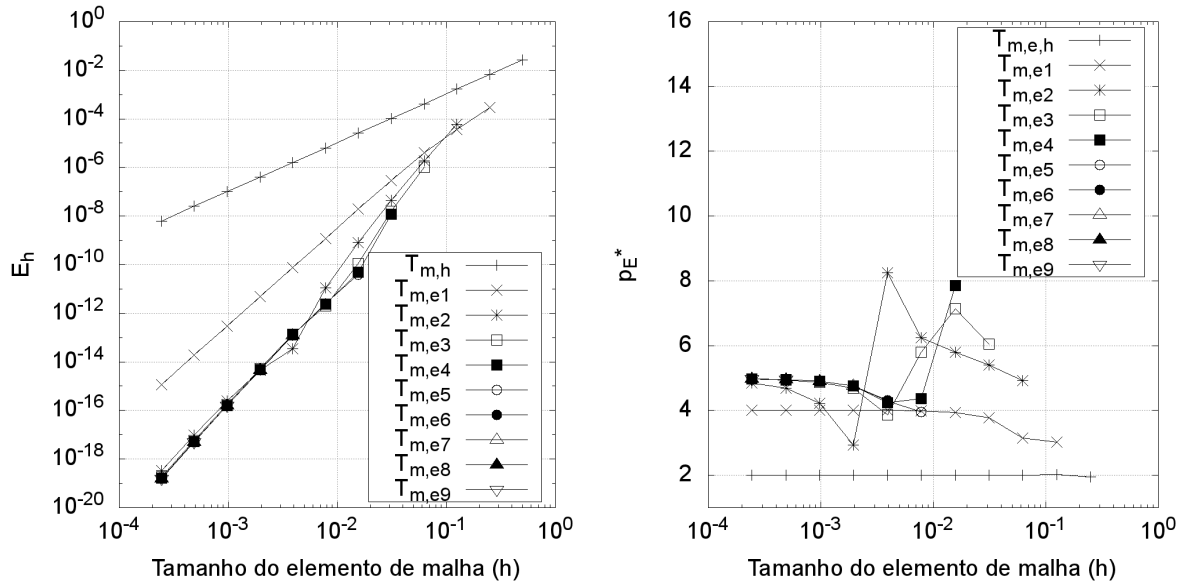


Figura 4.21 – Erro de discretização da variável  $T_m$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D VF.



resultados gerais das soluções exatas são mostrados na Tab. 4.7.

#### 4.5.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidos são semelhantes aos da seção 4.3.2 e estão presentes no apêndice B. A ordem máxima de  $Li_0$  foi de 6.

Figura 4.22 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D VF.

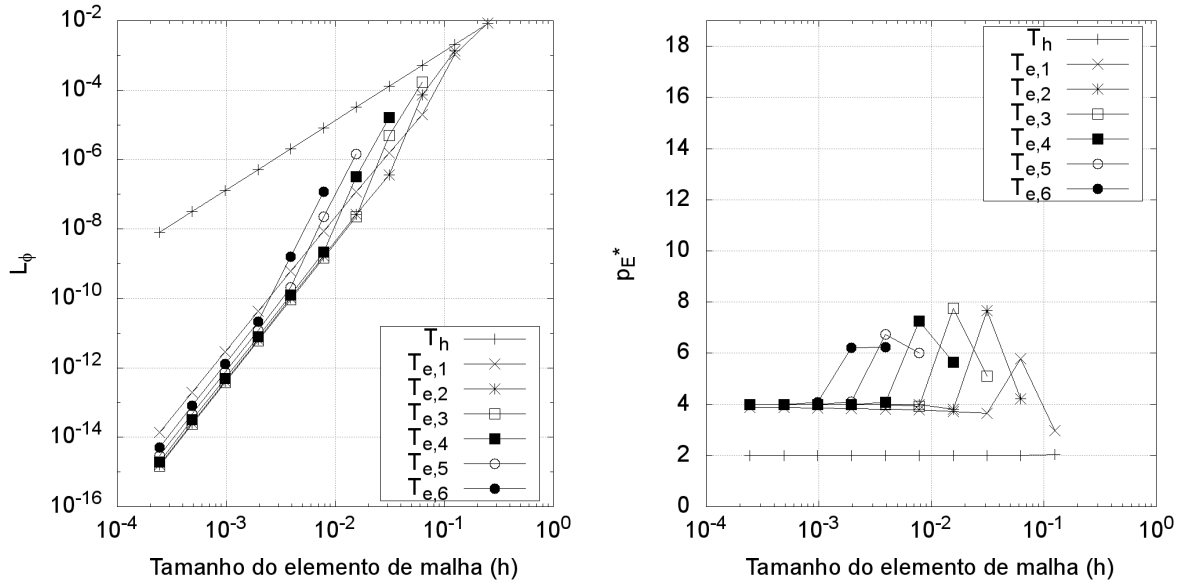


Tabela 4.7 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Advecção-Difusão Modificado 2D DF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}$	RAM (MB)	tCPU
$3^2$	Analítico	PDMA	1	1	0	6,3	0,000 s
$5^2$	$\phi_{an}$	PDMA	13	19	$1,2 \times 10^{-35}$	6,4	0,001 s
$9^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	16	25	$2,7 \times 10^{-35}$	6,4	0,003 s
$17^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	19	27	$4,1 \times 10^{-35}$	6,4	0,025 s
$33^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	20	29	$4,9 \times 10^{-35}$	6,5	0,199 s
$65^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	19	27	$4,9 \times 10^{-35}$	7,0	1,41 s
$129^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	18	25	$4,8 \times 10^{-35}$	9,2	10,5 s
$257^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	17	21	$4,7 \times 10^{-35}$	16,1	1,2 min
$513^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	15	19	$4,6 \times 10^{-35}$	43,6	8,6 min
$1025^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	13	17	$4,6 \times 10^{-35}$	154,6	1,01 h
$2049^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	12	13	$4,6 \times 10^{-35}$	598,1	6,3 h
$4097^2$	$\phi_{an,bc}$	PDMA	10	11	$4,6 \times 10^{-35}$	2371,6	42,6 h

#### 4.5.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, das duas variáveis analisadas  $T_c$  e  $T_m$ , apenas a variável  $T_c$  apresentou o comportamento esperado, como pode ser analisado na Fig. 4.23. Já a variável  $T_m$  apresentou um limite de até 6ª ordem de acurácia como pode ser analisado na Fig. 4.24.

No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.25. Novamente percebe-se um limite de até 6ª ordem de acurácia. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 6 para todas as demais extrapolações a partir da 2ª e um erro

Figura 4.23 – Erro de discretização da variável  $T_c$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D DF.

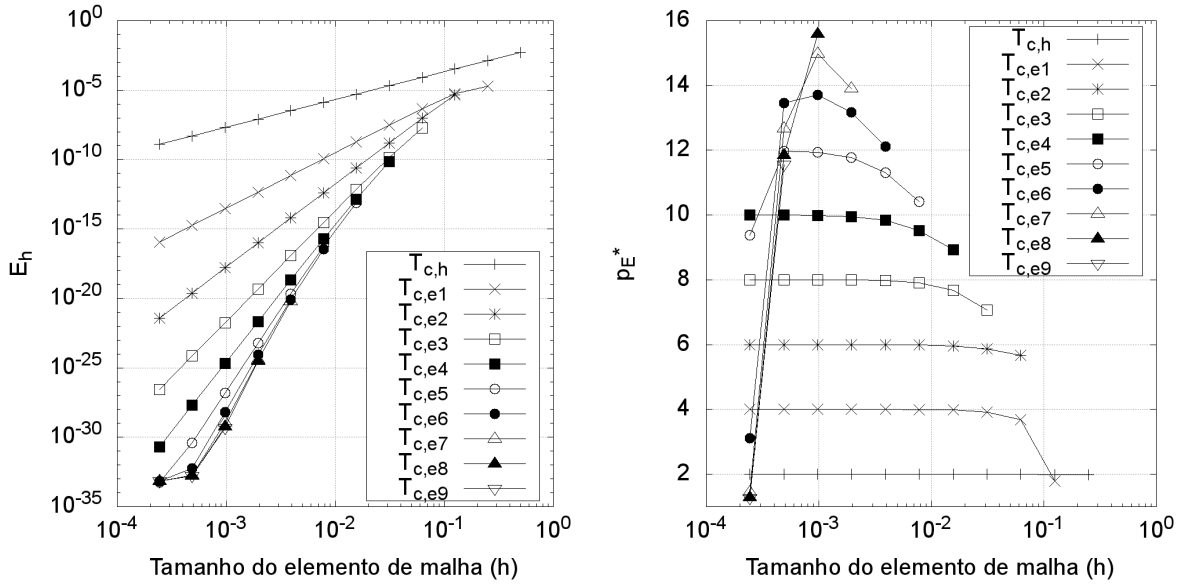
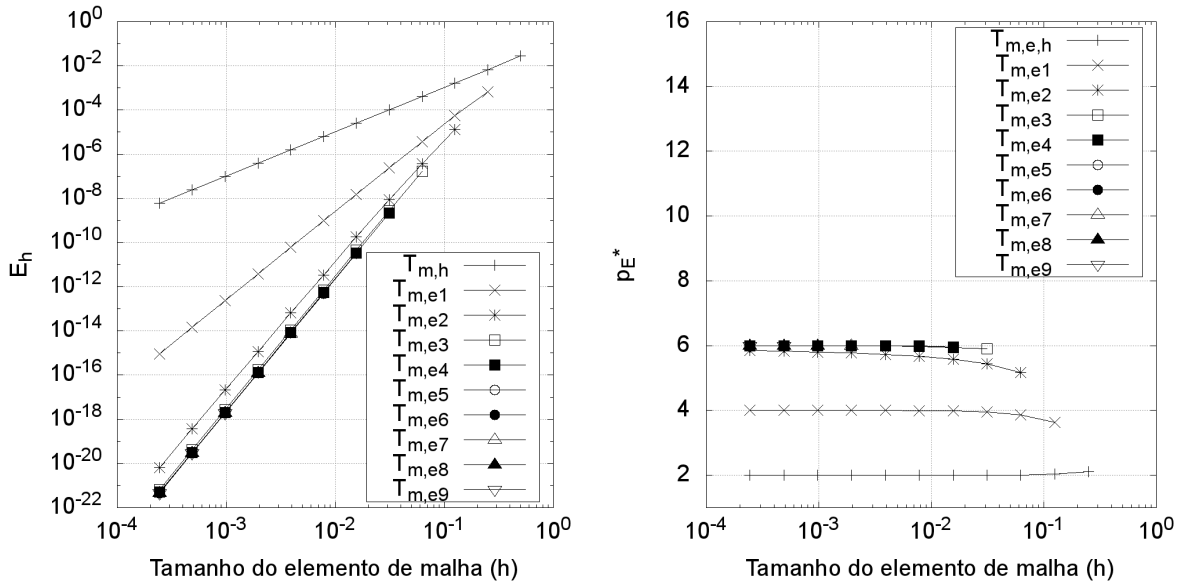


Figura 4.24 – Erro de discretização da variável  $T_m$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D DF.

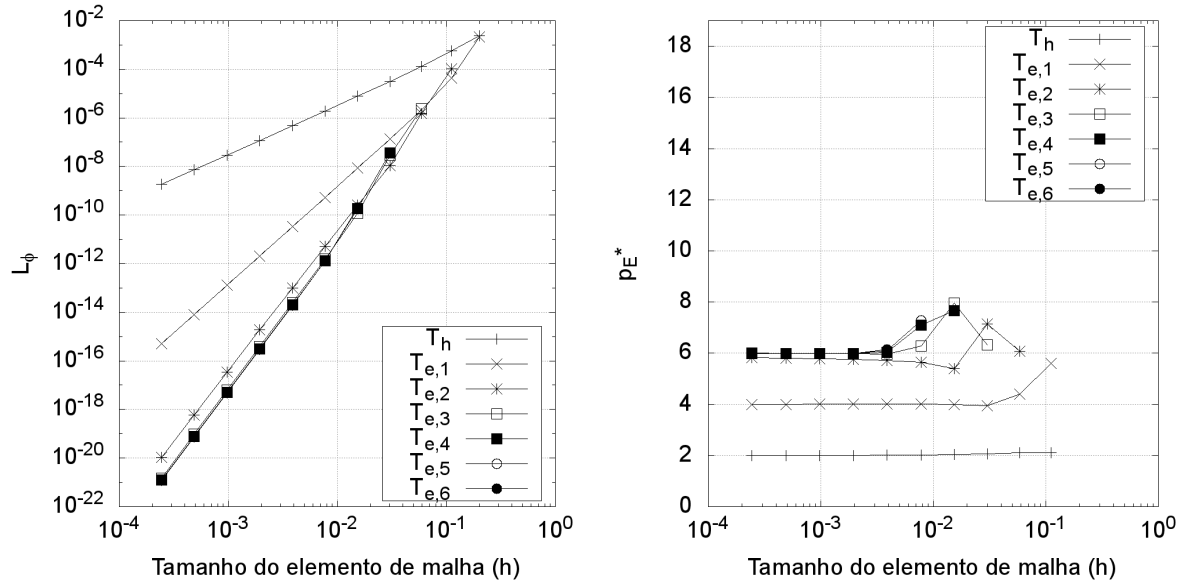


mínimo de  $1,8 \times 10^{-22}$  na malha  $4097^2$  a partir da extrapolação 5.

## 4.6 ADVECÇÃO-DIFUSÃO 2D MODIFICADO VF

Já no problema modelo utilizando volumes finitos foi implementada a metodologia multigrid e as malhas utilizadas foram:  $2^2$ ,  $4^2$ ,  $8^2$ ,  $16^2$ ,  $32^2$ ,  $64^2$ ,  $128^2$ ,  $256^2$ ,  $512^2$ ,  $1024^2$ ,  $2048^2$  e  $4096^2$ . O solver utilizado foi Gauss-Seidel com metodologia multigrid de correções aditivas com ponderação sobre a correção. Os resultados gerais das soluções exatas estão

Figura 4.25 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D DF.



na Tab. 4.8. Neste caso foram obtidos os resultados numéricos exatos de cada um dos tamanhos de problema.

Tabela 4.8 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Advecção-Difusão Modificado 2D VF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\bar{L}_{1r}$	RAM (MB)	tCPU
$2^2$	Analítico	GS MGCA	114	207	$7,3 \times 10^{-37}$	6,3	0,197 s
$4^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	43	79	$3,7 \times 10^{-36}$	6,3	0,050 s
$8^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	45	83	$6,4 \times 10^{-36}$	6,3	0,060 s
$16^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	41	75	$5,9 \times 10^{-36}$	6,3	0,060 s
$32^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	42	77	$5,8 \times 10^{-36}$	6,5	0,120 s
$64^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	40	71	$5,7 \times 10^{-36}$	7,1	0,352 s
$128^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	43	75	$6,0 \times 10^{-36}$	9,6	1,36 s
$256^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	46	77	$6,0 \times 10^{-36}$	16,6	5,33 s
$512^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	48	83	$6,0 \times 10^{-36}$	45,5	23,1 s
$1024^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	60	95	$6,1 \times 10^{-36}$	160,6	1,74 min
$2048^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	64	107	$6,1 \times 10^{-36}$	621,2	7,61 min
$4096^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	70	117	$6,1 \times 10^{-36}$	2461,7	32,6 min

#### 4.6.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidos são semelhantes aos da seção 4.4.1 e estão presentes no apêndice B. A ordem máxima de  $Li_0$  foi de 4.

### 4.6.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, das duas variáveis analisadas  $T_c$  e  $T_m$ , apenas a variável  $T_c$  apresentou o comportamento esperado, como pode ser analisado na Fig. 4.26. Já a variável  $T_m$  apresentou um limite de até 5ª ordem de acurácia como pode ser analisado na Fig. 4.27.

Figura 4.26 – Erro de discretização da variável  $T_c$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D VF.

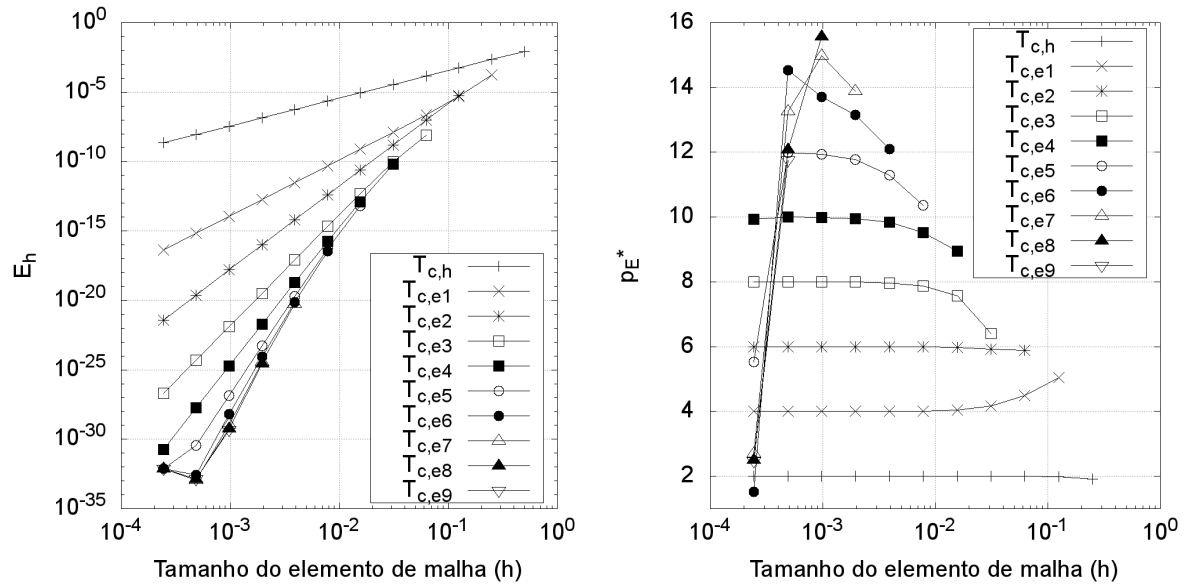
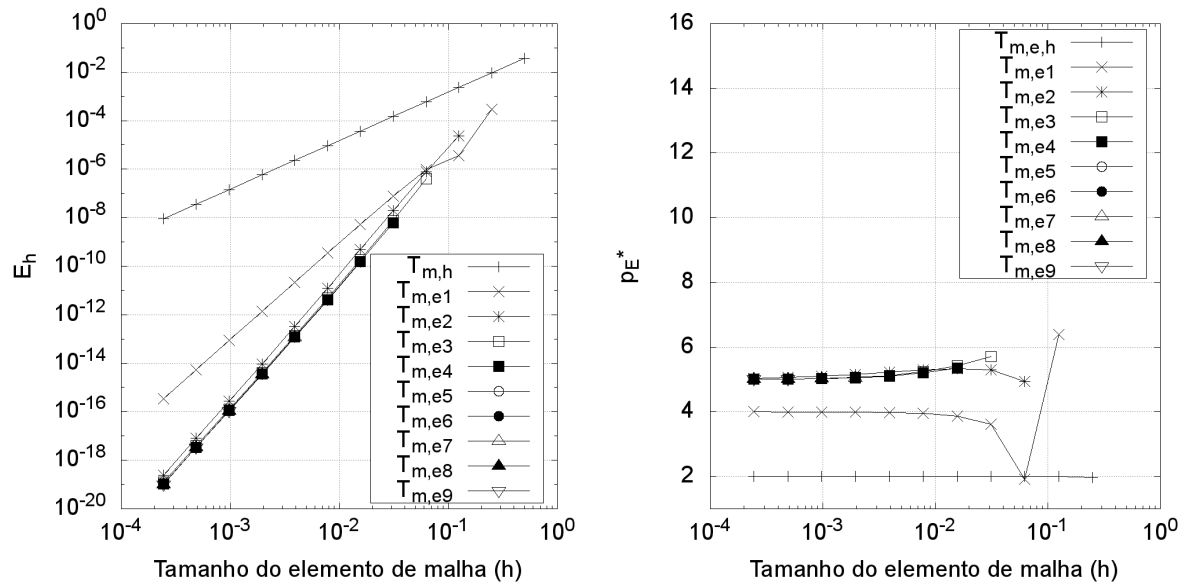


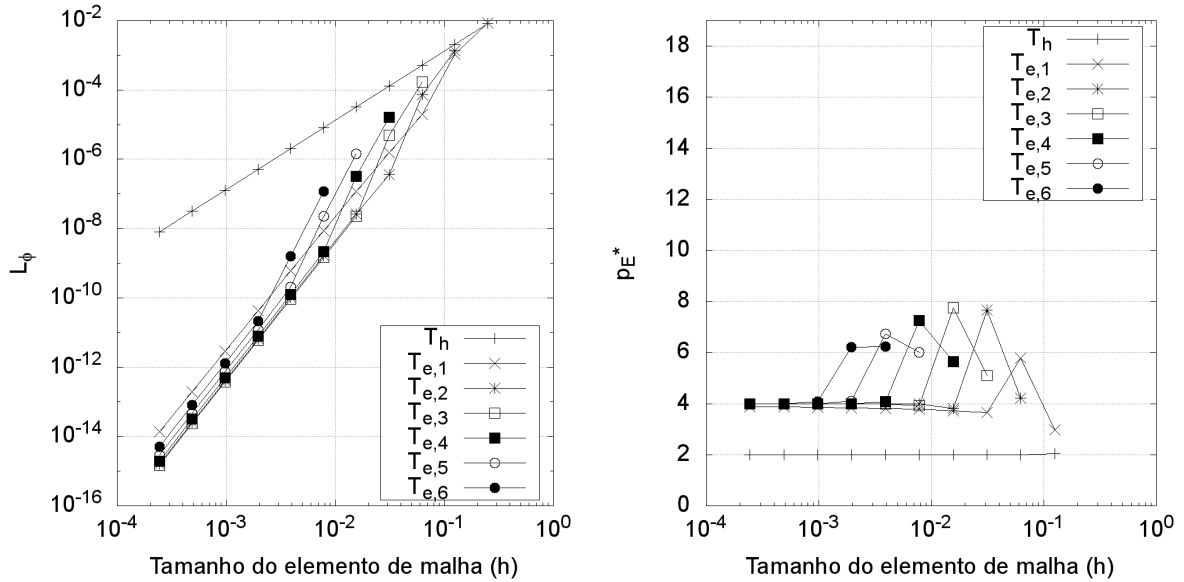
Figura 4.27 – Erro de discretização da variável  $T_m$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão Modificado 2D VF



No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.28, novamente percebe-se um limite de até 4ª ordem de acurácia. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções

até uma ordem tendendo a 4 para todas as demais extrapolações a partir da 2ª e um erro mínimo de  $1,1 \times 10^{-16}$  na malha  $4096^2$  a partir da extrapolação 3.

Figura 4.28 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Advecção-Difusão 2D Modificado VF



## 4.7 BURGERS 2D DF

Neste problema modelo foi implementada a metodologia multigrid como no trabalho de GONÇALVES (2013), embora o programador do código utilizado seja o Santiago (2010). As malhas utilizadas foram:  $3^2$ ,  $5^2$ ,  $9^2$ ,  $17^2$ ,  $33^2$ ,  $65^2$ ,  $129^2$ ,  $257^2$ ,  $513^2$ ,  $1025^2$ ,  $2049^2$  e  $4097^2$ . Os resultados gerais das soluções exatas são mostrados na Tab. 4.9.

### 4.7.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidas são semelhantes aos da seção 4.3.2 e estão presentes no apêndice B. A ordem máxima de  $Li_0$  foi de 6 tanto para  $U$  quanto para  $V$ . A redução no tempo de processamento da simulação com o solver MSI é mostrada na Fig. 4.29.

Ao fazer uma regressão dos dados mostrados na Fig. 4.29 para a equação empírica de tempo de CPU dado pela Eq. (2.21) obtém-se a Tab. 4.10.

### 4.7.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, as três variáveis analisadas  $u_c$ ,  $v_c$  e  $\dot{m}$  apresentaram limite de até 12ª ordem de acurácia como pode ser analisado na Fig. 4.30. Apenas a variável  $\dot{m}$  é mostrada aqui; no Apêndice A estão as demais figuras.

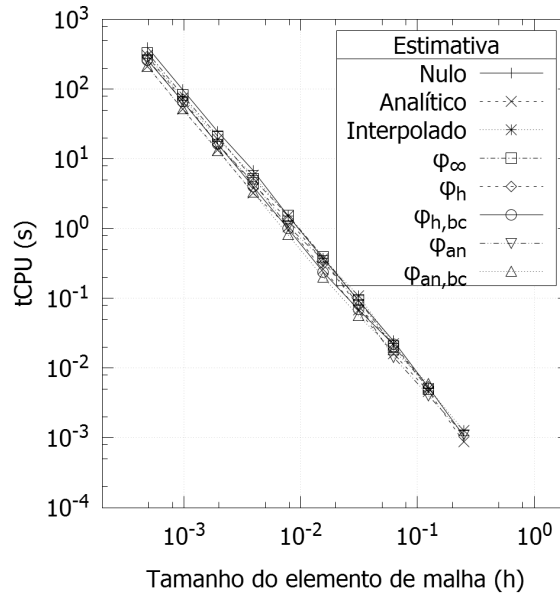


Tabela 4.9 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Burgers 2D DF

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}(U \text{ e } V)$	RAM (MB)	tCPU
$3^2$	Nulo	MSI MGFAS	1	1	0	4,4	0,343 s
$5^2$	Nulo	MSI MGFAS	22	34	$3,4 \times 10^{-35}$	4,4	0,374 s
$9^2$	Nulo	MSI MGFAS	19	32	$6,8 \times 10^{-35}$	4,4	0,374 s
$17^2$	Nulo	MSI MGFAS	18	30	$8,2 \times 10^{-35}$	4,5	0,484 s
$33^2$	Nulo	MSI MGFAS	18	30	$9,5 \times 10^{-35}$	4,9	1,04 s
$65^2$	Nulo	MSI MGFAS	17	28	$1,1 \times 10^{-34}$	6,5	2,21 s
$129^2$	Nulo	MSI MGFAS	16	26	$1,0 \times 10^{-34}$	12,9	7,1 s
$257^2$	Nulo	MSI MGFAS	14	26	$1,1 \times 10^{-34}$	38,3	28,6 s
$513^2$	Nulo	MSI MGFAS	14	26	$1,1 \times 10^{-34}$	136,1	1,9 min
$1025^2$	Nulo	MSI MGFAS	14	24	$1,1 \times 10^{-34}$	526,5	7,2 min
$2049^2$	Nulo	MSI MGFAS	13	24	$1,1 \times 10^{-34}$	2087,2	29,1 min
$4097^2$	Nulo	MSI MGFAS	13	24	$1,1 \times 10^{-34}$	4196,7	4,8 h

onde MSI MGFAS é o multigrid com MSI implementado por Santiago (2010), e neste caso  $\overline{L}_{1r}(U \text{ e } V)$  representa a média da norma  $L_1$  do resíduo do sistema linear de U e de V.

Figura 4.29 – Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para o solver MSI com as diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D DF



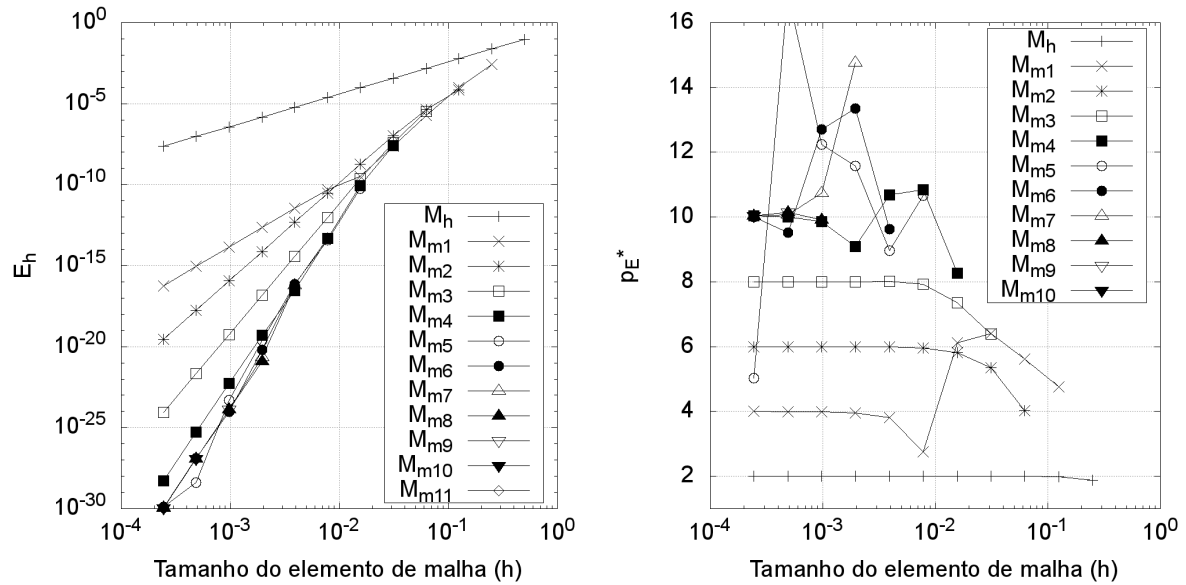
No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.31 para U e na Fig. 4.32 para V. Há um limite de até 6ª ordem de acurácia para U e até 8ª ordem de acurácia para V.

Novamente estes limites de acurácia ainda são objeto de estudo, neste caso em que havia duas variáveis incógnita e se obteve diferentes limites.

Percebe-se nas Figs. 4.31 e 4.32 que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 6 e 8 para U e V respectivamente,

Tabela 4.10 – Coeficientes da Eq. (2.21) - Burgers 2D DF.

Estimativa	k	p	<i>rquad</i>
Nulo	$5,327 \times 10^{-5}$	1,048	0,998
Analítico	$5,104 \times 10^{-5}$	1,004	0,998
Interpolado	$6,674 \times 10^{-5}$	1,014	0,998
$\phi_\infty$	$7,218 \times 10^{-5}$	1,010	0,999
$\phi_h$	$7,606 \times 10^{-5}$	0,993	0,999
$\phi_{h,bc}$	$6,918 \times 10^{-5}$	0,991	0,999
$\phi_{an}$	$4,962 \times 10^{-5}$	1,024	0,998
$\phi_{an,bc}$	$6,918 \times 10^{-5}$	0,973	0,999

Figura 4.30 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $\hat{m}$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF.

para todas as demais extrapolações a partir da 2ª e 3ª respectivamente, isto corresponde um erro mínimo de  $3,3 \times 10^{-21}$  e  $7,3 \times 10^{-25}$  para U e V respectivamente na malha  $4097^2$  na extrapolação 6.

## 4.8 BURGERS 2D VF

No problema modelo utilizando volumes finitos também foi implementada a metodologia multigrid e as malhas utilizadas foram:  $2^2$ ,  $4^2$ ,  $8^2$ ,  $16^2$ ,  $32^2$ ,  $64^2$ ,  $128^2$ ,  $256^2$ ,  $512^2$ ,  $1024^2$ ,  $2048^2$  e  $4096^2$ . O solver utilizado foi Gauss-Seidel com metodologia multigrid de correções aditivas com ponderação sobre a correção. Os resultados gerais das soluções exatas estão na Tab. 4.11. Neste caso foram obtidos os resultados numéricos exatos de cada um dos tamanhos de problema.

Figura 4.31 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF U.

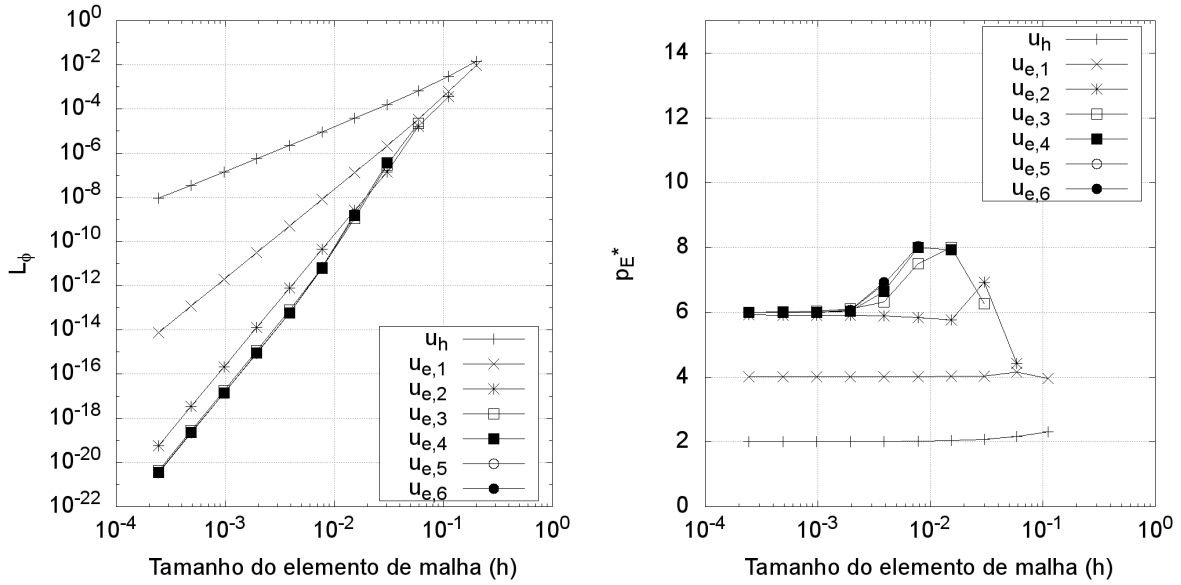
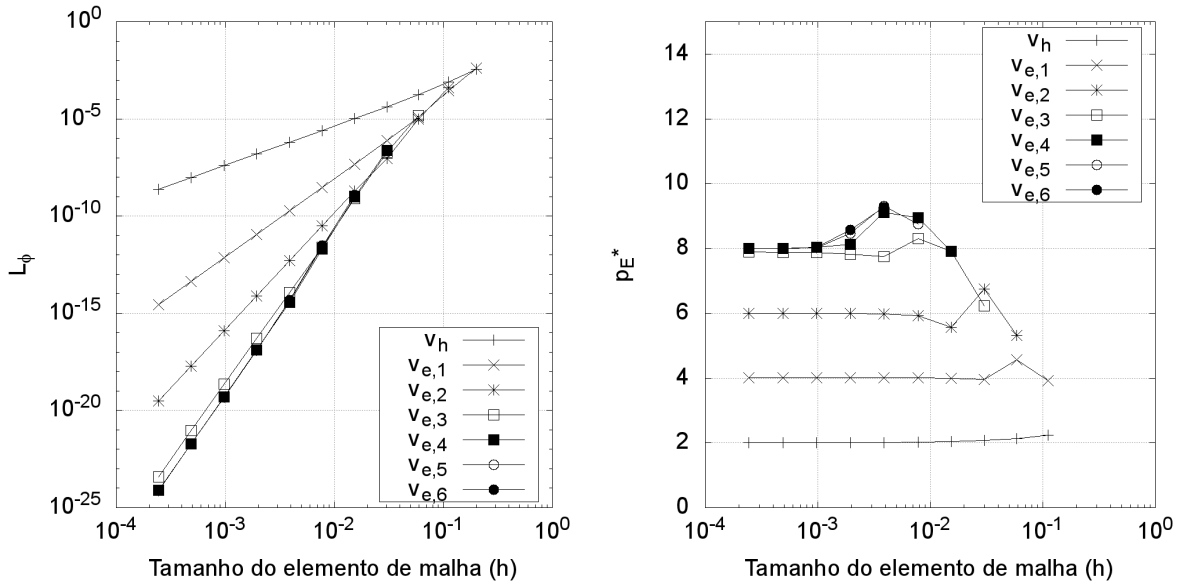


Figura 4.32 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF V.



#### 4.8.1 Erro de iteração

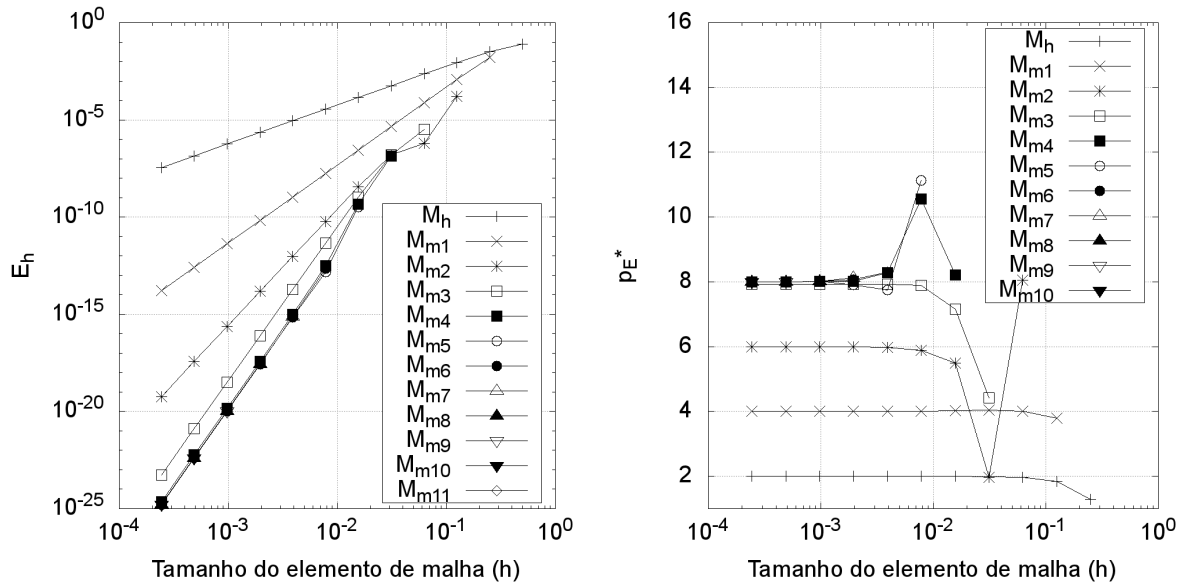
Os resultados e análises obtidos são semelhantes aos da seção 4.3.2 e estão presentes no apêndice B. A ordem máxima de  $Li_i$  foi de 4 para U e 6 para V.

#### 4.8.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, as três variáveis analisadas  $u_c$ ,  $v_c$  e  $\dot{m}$  apresentaram limite de até 8ª ordem de acurácia como pode ser analisado na Fig. 4.33. Apenas a variável  $\dot{m}$  é mostrada aqui; no Apêndice A estão as demais figuras.

Tabela 4.11 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Burgers 2D VF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}(U \text{ e } V)$	RAM (MB)	tCPU
$2^2$	Analítico	GS MGCA	119	231	$7,5 \times 10^{-35}$	6,4	0,205 s
$4^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	44	85	$3,7 \times 10^{-35}$	6,4	0,067 s
$8^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	41	79	$6,2 \times 10^{-35}$	6,4	0,086 s
$16^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	38	73	$5,3 \times 10^{-35}$	6,4	0,17 s
$32^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	43	77	$6,1 \times 10^{-35}$	6,6	0,492 s
$64^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	43	81	$6,2 \times 10^{-35}$	7,3	1,9 s
$128^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	45	83	$6,5 \times 10^{-35}$	9,8	8,11 s
$256^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	48	89	$6,5 \times 10^{-35}$	19,4	32,1 s
$512^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	53	93	$6,5 \times 10^{-35}$	56,3	2,2 min
$1024^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	59	105	$6,6 \times 10^{-35}$	204,7	9,3 min
$2048^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	70	119	$6,6 \times 10^{-35}$	796,8	41,8 min
$4096^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	81	131	$6,6 \times 10^{-35}$	3158,2	2,95 h

Figura 4.33 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $\hat{m}$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers VF 2D.

No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.34 para  $U$  e na Fig. 4.35 para  $V$ . Há um limite de até 4ª ordem de acurácia para  $U$  e até 6ª ordem de acurácia para  $V$ . Percebe-se nas Figs. 4.34 e 4.35 que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 4 e 6 para  $U$  e  $V$  respectivamente, para todas as demais extrapolações a partir da 1ª e 2ª respectivamente, isto corresponde a um erro mínimo de  $7,7 \times 10^{-15}$  e  $1,1 \times 10^{-19}$  para  $U$  e  $V$  respectivamente na malha  $4097^2$  na extrapolação 4.

Figura 4.34 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D VF U.

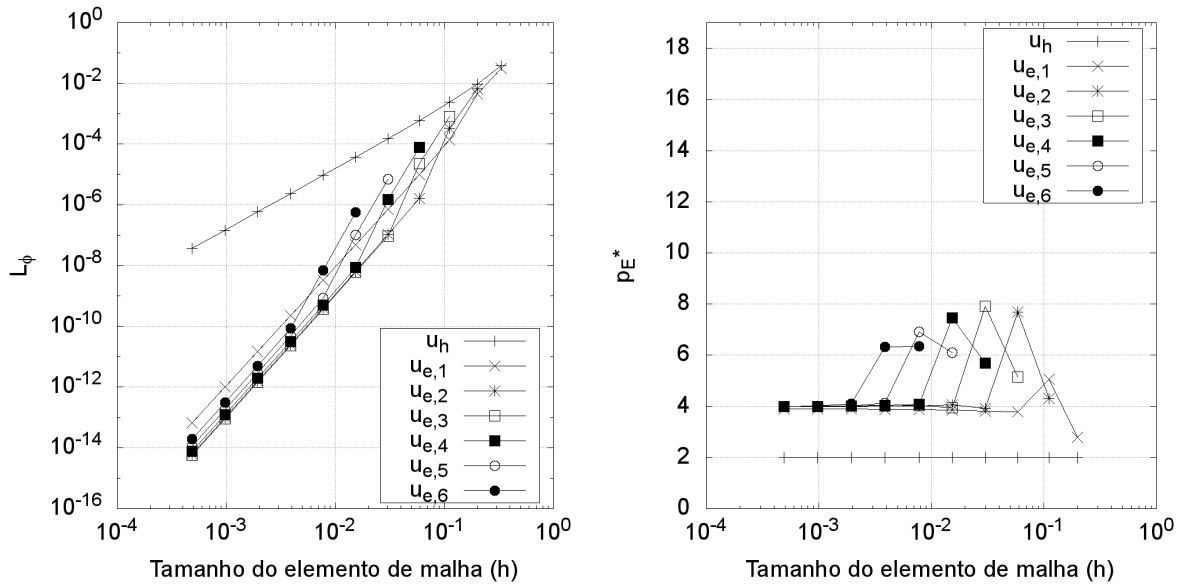
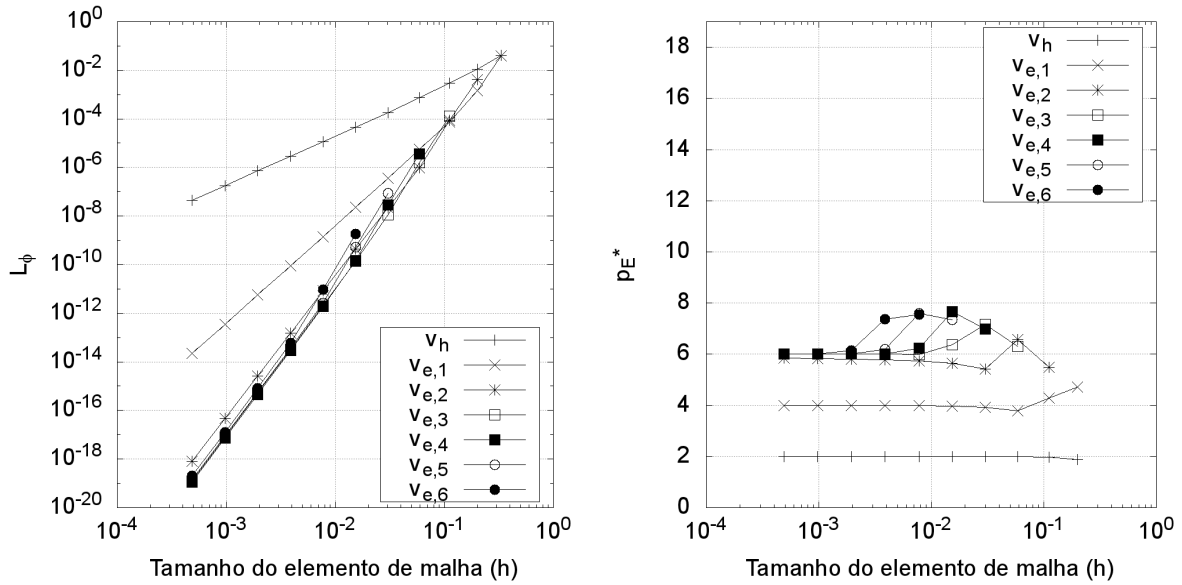


Figura 4.35 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D VF V.



## 4.9 NAVIER-STOKES 2D DF

Neste problema modelo foi implementada a metodologia multigrid pelo trabalho de Santiago (2010). As malhas utilizadas foram:  $3^2$ ,  $5^2$ ,  $9^2$ ,  $17^2$ ,  $33^2$ ,  $65^2$ ,  $129^2$ ,  $257^2$ ,  $513^2$ ,  $1025^2$ ,  $2049^2$  e  $4097^2$ . Os resultados gerais das soluções exatas são mostrados na Tab. 4.12.

Tabela 4.12 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Navier-Stokes 2D DF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}(\psi \text{ e } \omega)$	RAM (MB)	tCPU
$3^2$	Analítico	MSI MGFAS	1	1	0	4,2	0,000 s
$5^2$	$\phi_{an}$	MSI MGFAS	31	63	$2,3 \times 10^{-34}$	4,2	0,015 s
$9^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	37	71	$2,2 \times 10^{-35}$	4,2	0,031 s
$17^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	36	71	$4,0 \times 10^{-35}$	4,3	0,062 s
$33^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	34	65	$3,7 \times 10^{-35}$	4,5	0,296 s
$65^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	30	59	$4,0 \times 10^{-34}$	5,4	1,11 s
$129^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	27	53	$3,9 \times 10^{-34}$	9,0	3,76 s
$257^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	24	47	$3,9 \times 10^{-34}$	21,7	16,6 s
$513^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	21	41	$3,9 \times 10^{-34}$	73,4	54,6 s
$1025^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	19	35	$3,9 \times 10^{-34}$	278,6	3,0 min
$2049^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	15	29	$3,9 \times 10^{-34}$	1100,2	9,4 min
$4097^2$	$\phi_{an,bc}$	MSI MGFAS	12	23	$3,9 \times 10^{-34}$	3961,1	29,1 min

onde MSI MGFAS é o multigrid com MSI implementado por Santiago (2010), e neste caso  $\overline{L}_{1r}(\psi \text{ e } \omega)$  representa a média da norma  $L_1$  do resíduo do sistema linear da média de  $\psi$  e  $\omega$ .

#### 4.9.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidos são semelhantes aos da seção 4.3.2 e estão presentes no apêndice B. A ordem máxima de  $Li_0$  foi de 6 tanto para  $\psi$  quanto para  $\omega$ . A redução no tempo de processamento da simulação como o solver MSI é mostrada na Fig. 4.36. Ao fazer uma regressão dos dados mostrados na Fig. 4.36 para a equação empírica de tempo de CPU dado pela Eq. (2.21) obtém-se a Tab. 4.13.

Figura 4.36 – Comparação de tempo de CPU em função do tamanho do elemento de malha para o solver MSI com as diferentes estimativas iniciais - Navier-Stokes 2D DF

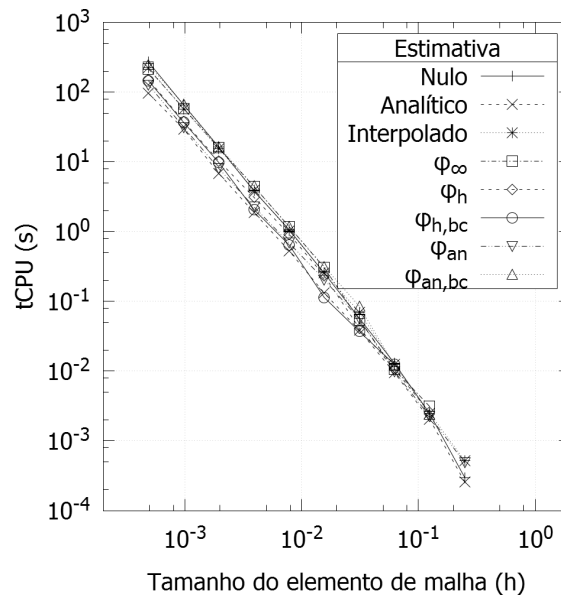


Tabela 4.13 – Coeficientes da Eq. (2.21) - Navier-Stokes 2D DF.

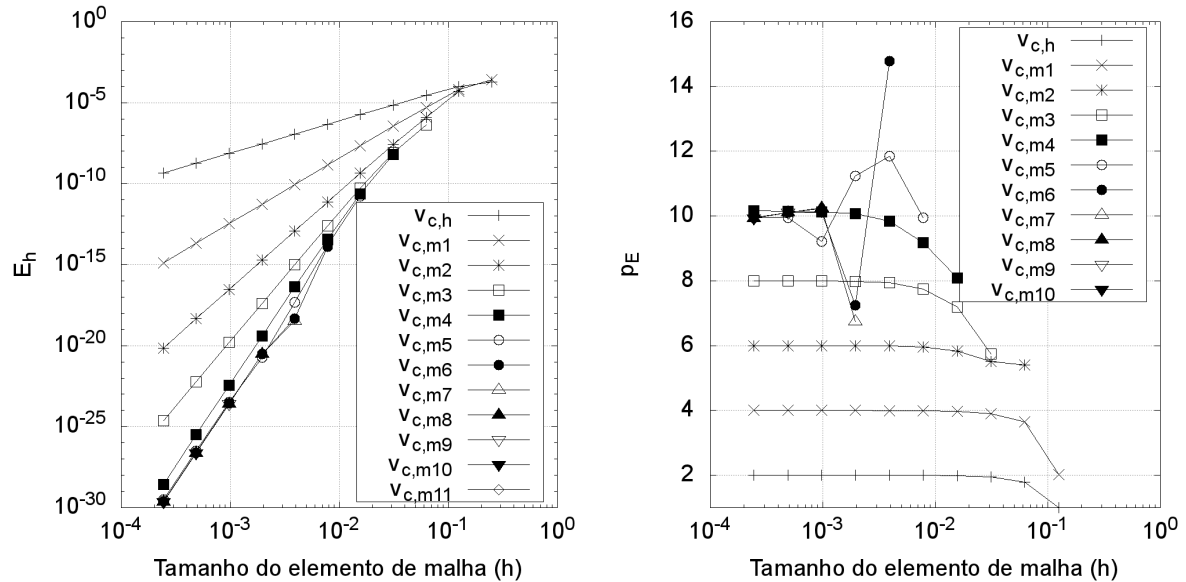
Estimativa	k	p	<i>rquad</i>
Nulo	$1,910 \times 10^{-5}$	1,098	0,994
Analítico	$2,053 \times 10^{-5}$	1,026	0,994
Interpolado	$2,781 \times 10^{-5}$	1,060	0,996
$\phi_\infty$	$3,972 \times 10^{-5}$	1,032	0,997
$\phi_h$	$3,931 \times 10^{-5}$	1,004	0,997
$\phi_{h,bc}$	$3,681 \times 10^{-5}$	0,995	0,998
$\phi_{an}$	$3,054 \times 10^{-5}$	1,010	0,995
$\phi_{an,bc}$	$3,894 \times 10^{-5}$	1,042	0,995

#### 4.9.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, duas das três variáveis analisadas  $u_c$  e  $v_c$  apresentaram limite de até  $10^a$  ordem de acurácia como pode ser analisado na Fig. 4.37.

Apenas a variável  $v_c$  é mostrada aqui; no Apêndice A estão as demais figuras. No entanto a variável  $m$  apresentou degeneração na progressão aritmética das ordens verdadeiras (mesmo utilizando regra do trapézio para a sua obtenção) para a unidade, ou seja, a progressão das ordens verdadeiras obtida foi: 2, 3, 4 . . . .

Figura 4.37 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $v_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF.



No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado nas Fig. 4.38 para  $\psi$  e nas Fig. 4.39 para  $\omega$ . Há um limite de até  $8^a$  ordem de acurácia para  $\psi$  e até  $6^a$  ordem de acurácia para  $\omega$ .

Novamente estes limites de acurácia ainda são objeto de estudo, neste caso em que havia duas variáveis incógnita e se obteve diferentes limites.

Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 8 e 6 para  $\psi$  e  $\omega$  respectivamente, para todas as demais extrapolações a partir da 3ª e 2ª respectivamente, isto corresponde a um erro mínimo de  $2,4 \times 10^{-26}$  e  $2,0 \times 10^{-20}$  para  $\psi$  e  $\omega$  respectivamente na malha  $4097^2$  na extrapolação 5.

Figura 4.38 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF  $\psi$ .

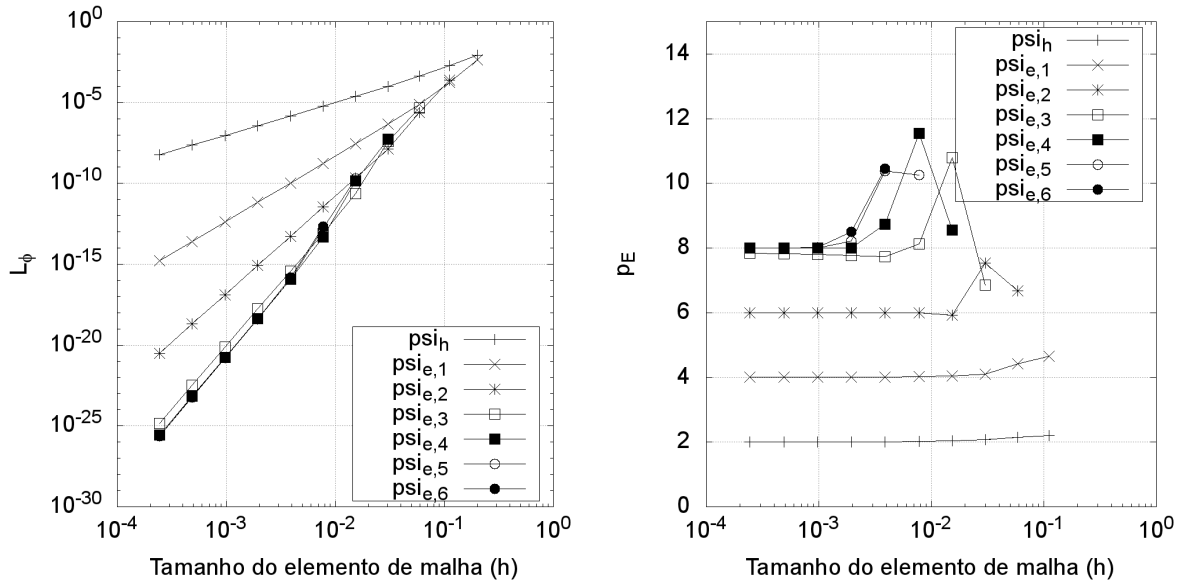
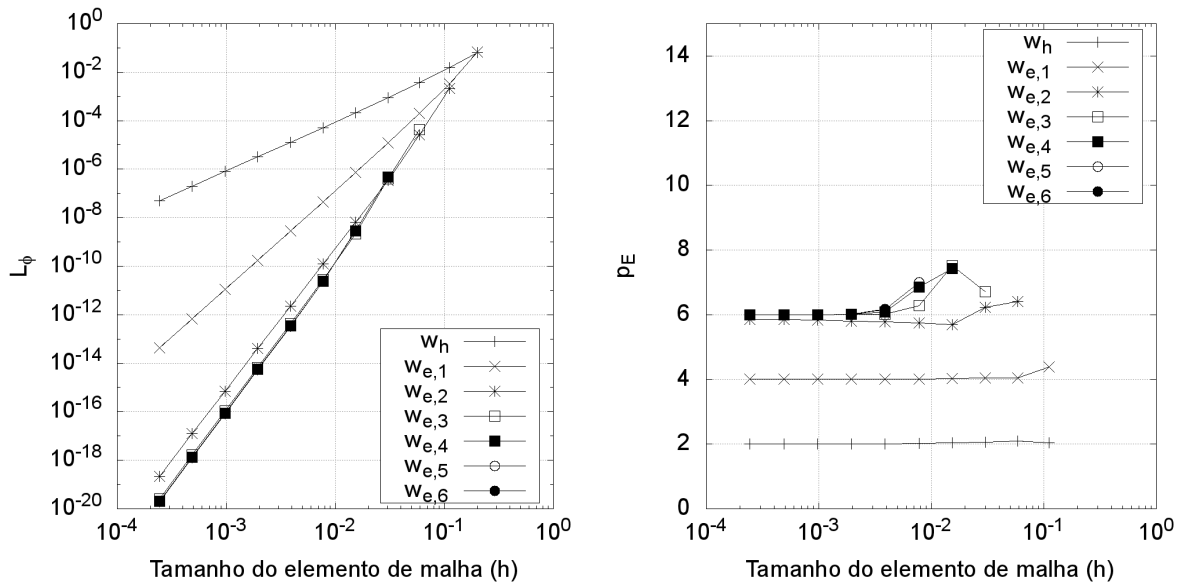


Figura 4.39 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF  $\omega$ .



## 4.10 NAVIER-STOKES 2D VF

No problema modelo utilizando volumes finitos também foi implementada a metodologia multigrid e as malhas utilizadas foram:  $2^2$ ,  $4^2$ ,  $8^2$ ,  $16^2$ ,  $32^2$ ,  $64^2$ ,  $128^2$ ,  $256^2$ ,  $512^2$ ,



$1024^2$ ,  $2048^2$  e  $4096^2$ . O solver utilizado foi Gauss-Seidel com metodologia multigrid de correções aditivas com ponderação sobre a correção. Os resultados gerais das soluções exatas estão na Tab. 4.14, neste caso foram obtidos os resultados numéricos exatos de cada um dos tamanhos de problema.

Tabela 4.14 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Navier-Stokes 2D VF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}(U \text{ e } V)$	RAM (MB)	tCPU
$2^2$	Analítico	GS MGCA	222	419	$1,6 \times 10^{-33}$	6,3	0,122 s
$4^2$	$\phi_{an}$	GS MGCA	49	97	$7,2 \times 10^{-34}$	6,3	0,048 s
$8^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	46	91	$1,2 \times 10^{-33}$	6,4	0,047 s
$16^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	44	85	$1,2 \times 10^{-33}$	6,4	0,102 s
$32^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	43	83	$1,3 \times 10^{-33}$	6,6	0,334 s
$64^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	45	87	$1,4 \times 10^{-33}$	7,2	1,13 s
$128^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	46	89	$1,4 \times 10^{-33}$	10,0	4,93 s
$256^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	46	89	$1,4 \times 10^{-33}$	19,4	17,1 s
$512^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	45	85	$1,4 \times 10^{-33}$	56,6	1,05 min
$1024^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	46	87	$1,5 \times 10^{-33}$	204,7	4,31 min
$2048^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	48	91	$1,5 \times 10^{-33}$	796,8	18,3 min
$4096^2$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	50	93	$1,5 \times 10^{-33}$	3163,1	1,13 h

#### 4.10.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidos são semelhantes aos da seção 4.3.2 e estão presentes no apêndice B. A ordem máxima de  $Li_0$  foi de 6.

#### 4.10.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, duas das três variáveis analisadas  $u_c$  e  $v_c$  apresentaram limite de até  $10^a$  a  $11^a$  ordem de acurácia como pode ser analisado na Fig. 4.40. Apenas a variável  $v_c$  é mostrada aqui; no Apêndice A estão as demais figuras. Ao contrário de diferenças finitas a variável  $\dot{m}$  não apresentou degeneração nas ordens verdadeiras.

No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado nas Fig. 4.41 para  $\psi$  e nas Fig. 4.42 para  $\omega$ . Há um limite de até  $6^a$  ordem de acurácia tanto para  $\psi$  quanto para  $\omega$ . Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 6 para ambas variáveis  $\psi$  e  $\omega$ , isto corresponde a um erro mínimo de  $1,1 \times 10^{-20}$  e  $1,7 \times 10^{-19}$  para  $\psi$  e  $\omega$  respectivamente na malha  $4096^2$  na extrapolação 3.

Figura 4.40 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $v_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF.

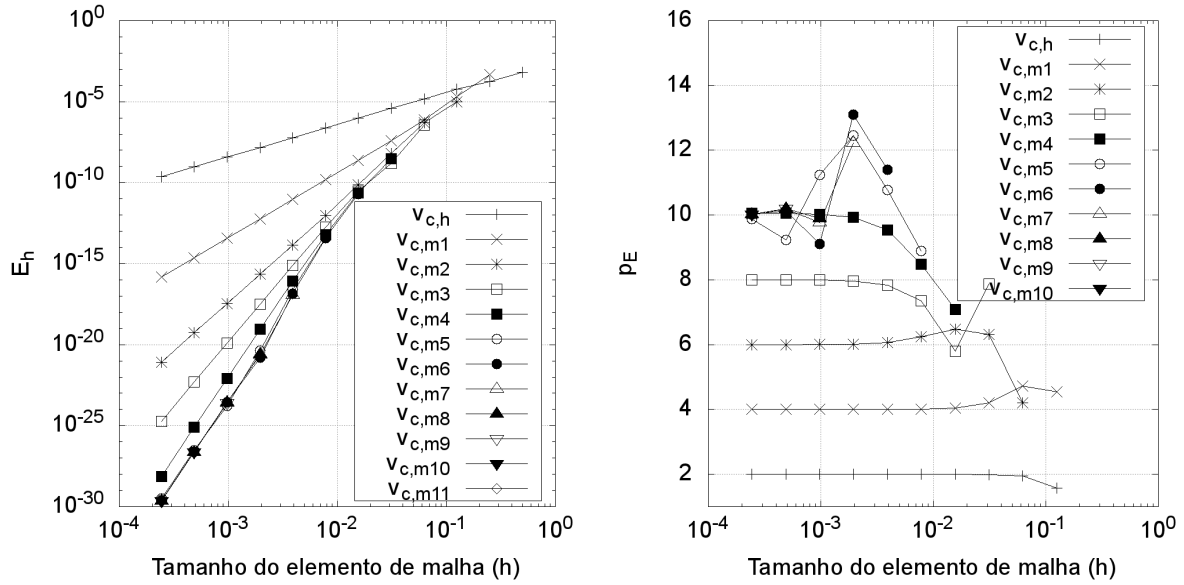
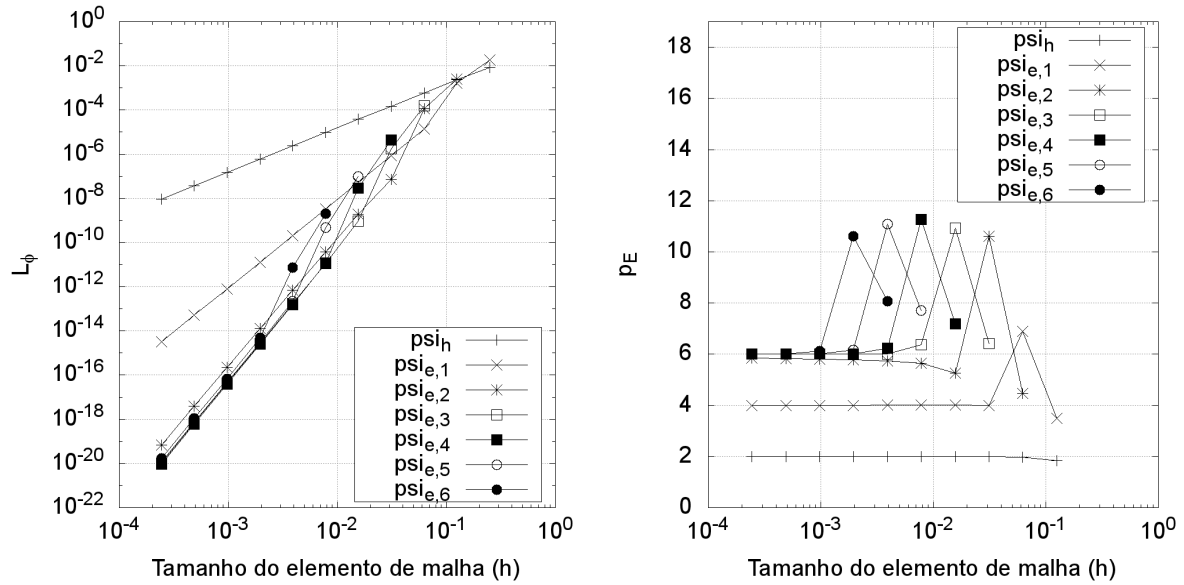


Figura 4.41 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF  $\psi$ .



## 4.11 LAPLACE 3D DF

Neste problema modelo não foi implementada a metodologia multigrid. As malhas utilizadas foram:  $3^3$ ,  $5^3$ ,  $9^3$ ,  $17^3$ ,  $33^3$ ,  $65^3$ ,  $129^3$ ,  $257^3$  e  $513^3$ . Os resultados gerais das soluções exatas são mostrados na Tab. 4.15.

Figura 4.42 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF  $\omega$ .

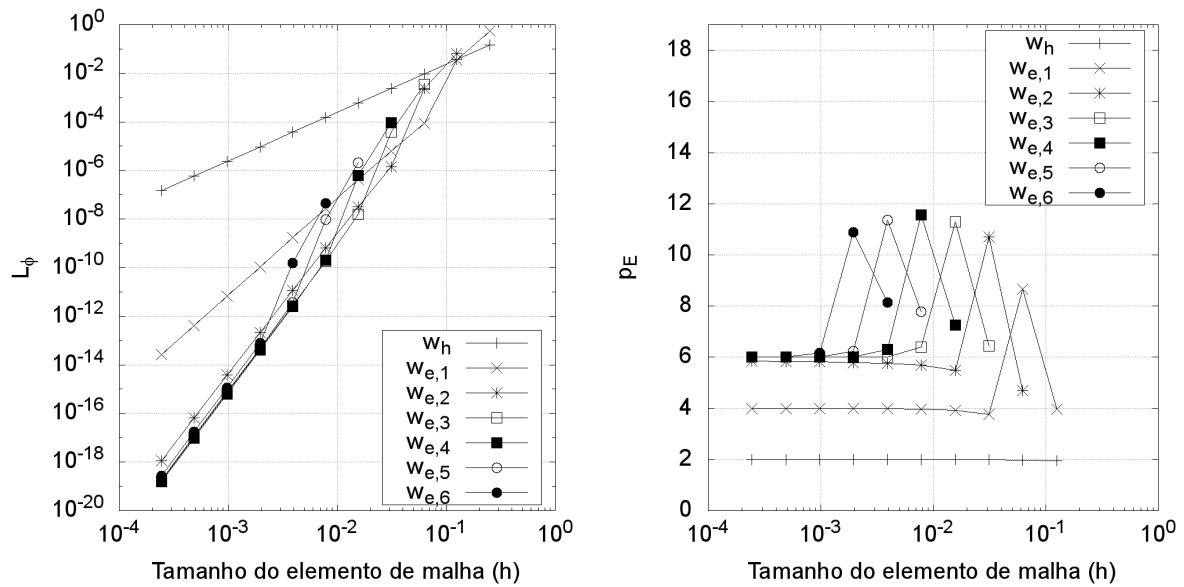


Tabela 4.15 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Laplace 3D DF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}$	RAM (MB)	tCPU
$3^3$	Análítico	HDMA	1	1	0	4,2	0,000 s
$5^3$	Análítico	HDMA	16	31	$1,5 \times 10^{-33}$	4,2	0,002 s
$9^3$	$\phi_{an}$	HDMA	24	41	$3,2 \times 10^{-33}$	4,3	0,040 s
$17^3$	$\phi_{an}$	HDMA	26	47	$4,7 \times 10^{-33}$	5,2	0,736 s
$33^3$	$\phi_{an,bc}$	HDMA	27	49	$6,7 \times 10^{-33}$	10,0	12,32 s
$65^3$	$\phi_{an,bc}$	HDMA	22	41	$1,0 \times 10^{-32}$	47,4	2,79 min
$129^3$	$\phi_{an,trc}$	HDMA	13	27	$1,6 \times 10^{-32}$	340,4	28,6 min
$257^3$	$\phi_{an,trc}$	HDMA	12	23	$2,6 \times 10^{-32}$	2631,4	6,6 h
$513^3$	$\phi_{an,tec}$	HDMA	7	13	$4,0 \times 10^{-32}$	$\approx 21000$	3,3 dias

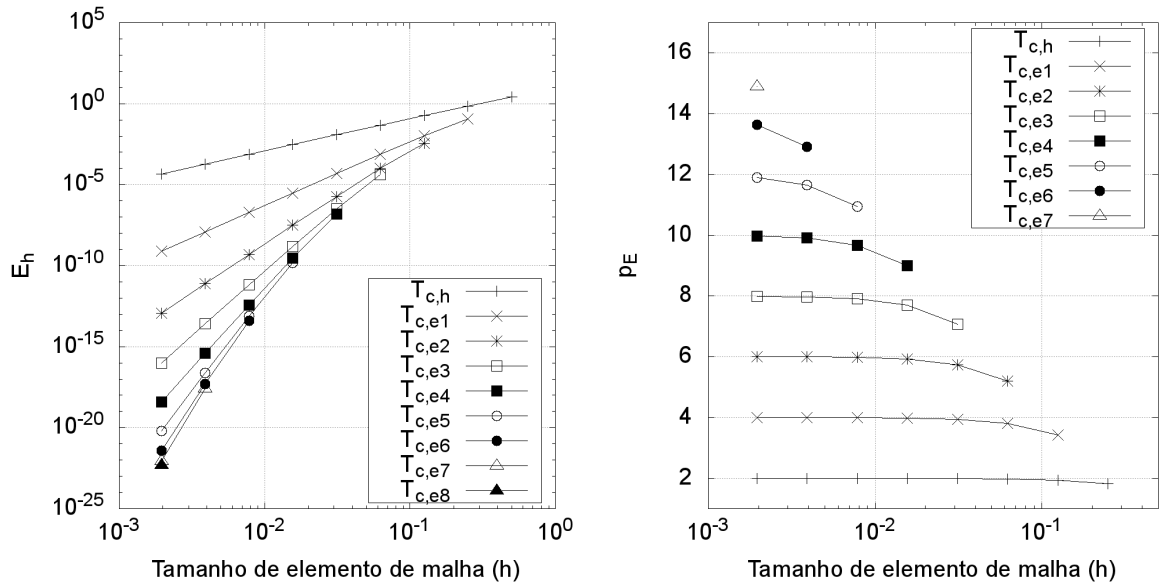
#### 4.11.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidas são semelhantes aos da seção 4.1.2 e estão presentes no apêndice B. Percebe-se que há uma redução progressiva no erro de iteração, chegando-se claramente à ordem 6 e provavelmente se houvesse mais malhas chegaria-se a valores cada vez menores.

#### 4.11.2 Erro de discretização

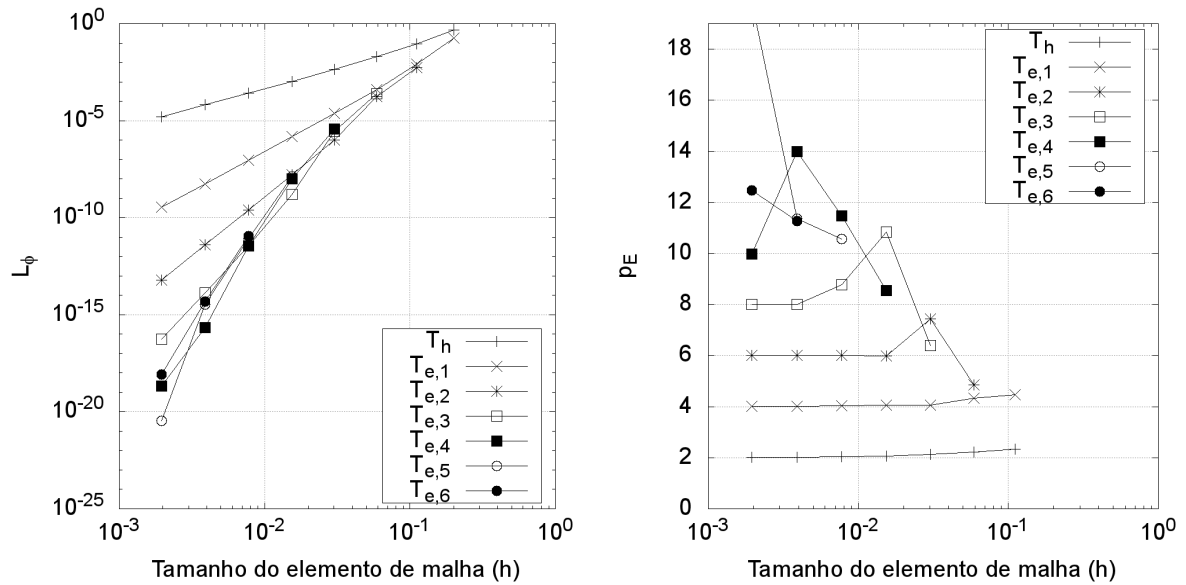
Com o uso de MER, as três variáveis analisadas  $T_c$ ,  $T_m$  e  $Q_e$  apresentaram o comportamento esperado no caso das múltiplas extrapolações de Richardson como pode ser analisado na Fig. 4.43. Apenas a variável  $T_c$  é mostrada aqui; no Apêndice A estão as demais figuras.

Figura 4.43 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $T_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D DF.



No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.44, nas malhas utilizadas não se percebe um limite na ordem de acurácia. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 14 e um erro mínimo de  $3,5 \times 10^{-21}$  na malha  $513^2$  na extrapolação 5.

Figura 4.44 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D DF.



## 4.12 LAPLACE 3D VF

No problema modelo utilizando volumes finitos foi implementada a metodologia multigrid e as malhas utilizadas foram:  $2^3$ ,  $4^3$ ,  $8^3$ ,  $16^3$ ,  $32^3$ ,  $64^3$ ,  $128^3$ ,  $256^3$  e  $512^3$ . O solver utilizado foi Gauss-Seidel com metodologia multigrid de correções aditivas com ponderação sobre a correção. Os resultados gerais das soluções exatas estão na Tab. 4.16. Neste caso foram obtidos os resultados numéricos exatos de cada um dos tamanhos de problema.

Tabela 4.16 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Laplace 3D VF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}$	RAM (MB)	tCPU
$2^3$	Nulo	GS MGCA	116	229	$6,0 \times 10^{-34}$	6,4	0,265 s
$4^3$	Nulo	GS MGCA	49	91	$3,2 \times 10^{-34}$	6,5	0,125 s
$8^3$	Nulo	GS MGCA	53	103	$6,3 \times 10^{-34}$	6,6	0,234 s
$16^3$	Nulo	GS MGCA	52	103	$9,4 \times 10^{-34}$	7,5	0,967 s
$32^3$	Nulo	GS MGCA	54	107	$1,1 \times 10^{-33}$	13,8	7,27 s
$64^3$	Nulo	GS MGCA	62	121	$1,2 \times 10^{-33}$	54,2	57,2 s
$128^3$	Nulo	GS MGCA	68	135	$1,2 \times 10^{-33}$	363,2	8,1 min
$256^3$	Nulo	GS MGCA	75	151	$1,2 \times 10^{-33}$	2782,9	59,9 min
$512^3$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	51	81	$1,2 \times 10^{-33}$	$\approx 21000$	7,5 h

### 4.12.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidas são semelhantes aos da seção 4.1.2 e estão presentes no apêndice B. Percebe-se que há uma redução progressiva no erro de iteração, chegando-se claramente à ordem 6 e provavelmente se houvesse mais malhas chegaria-se a valores cada vez menores.

### 4.12.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, as três variáveis analisadas  $T_c$ ,  $T_m$  e  $Q_e$  apresentaram o comportamento esperado no caso das múltiplas extrapolações de Richardson como pode ser analisado na Fig. 4.45. Apenas a variável  $T_c$  é mostrada aqui; no Apêndice A estão as demais figuras.

No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.46; nas malhas utilizadas não se percebe um limite na ordem de acurácia. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 12 e um erro mínimo de  $5,3 \times 10^{-20}$  na malha  $512^2$  na extrapolação 5.

Figura 4.45 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $T_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D VF.

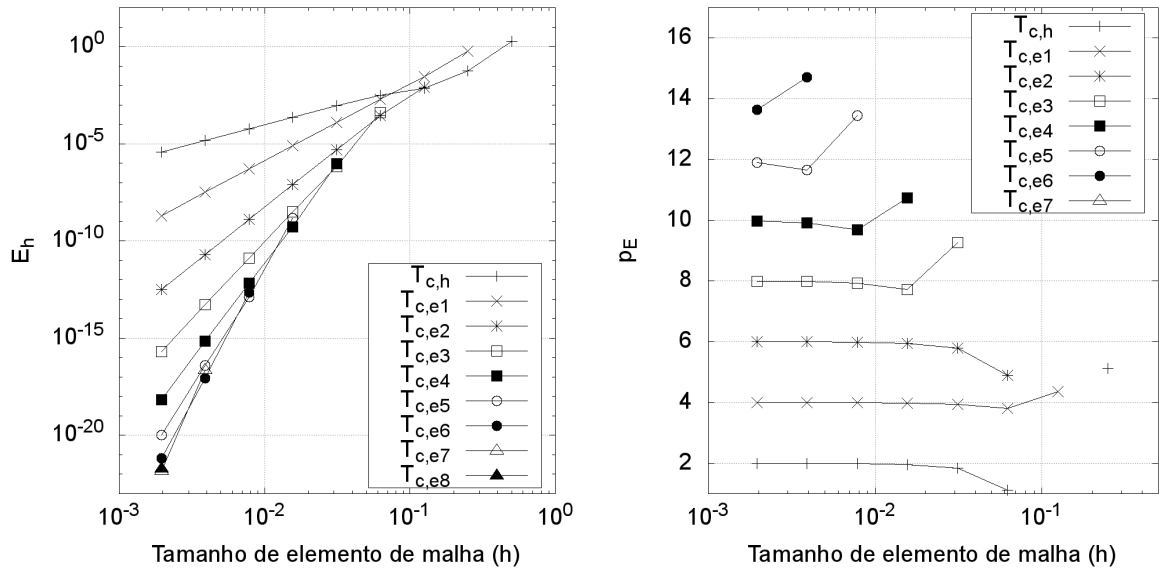
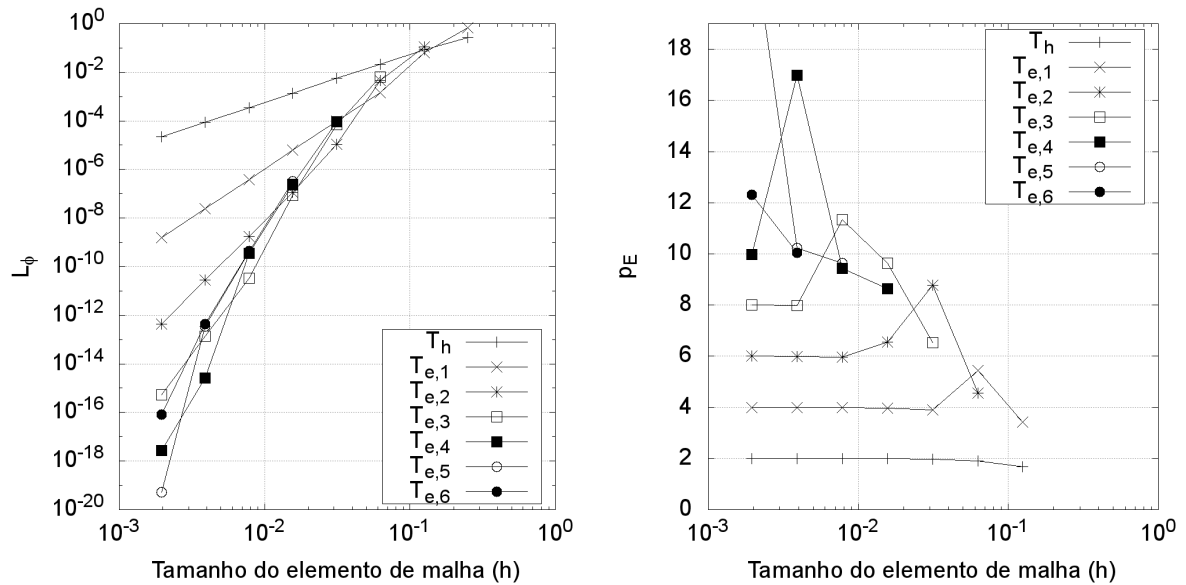


Figura 4.46 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D VF.



### 4.13 POISSON 3D DF

Neste problema modelo não foi implementada a metodologia multigrid. As malhas utilizadas foram:  $3^3$ ,  $5^3$ ,  $9^3$ ,  $17^3$ ,  $33^3$ ,  $65^3$ ,  $129^3$  e  $257^3$ . Os resultados gerais das soluções exatas são mostrados na Tab. 4.17.

Tabela 4.17 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Poisson 3D DF.

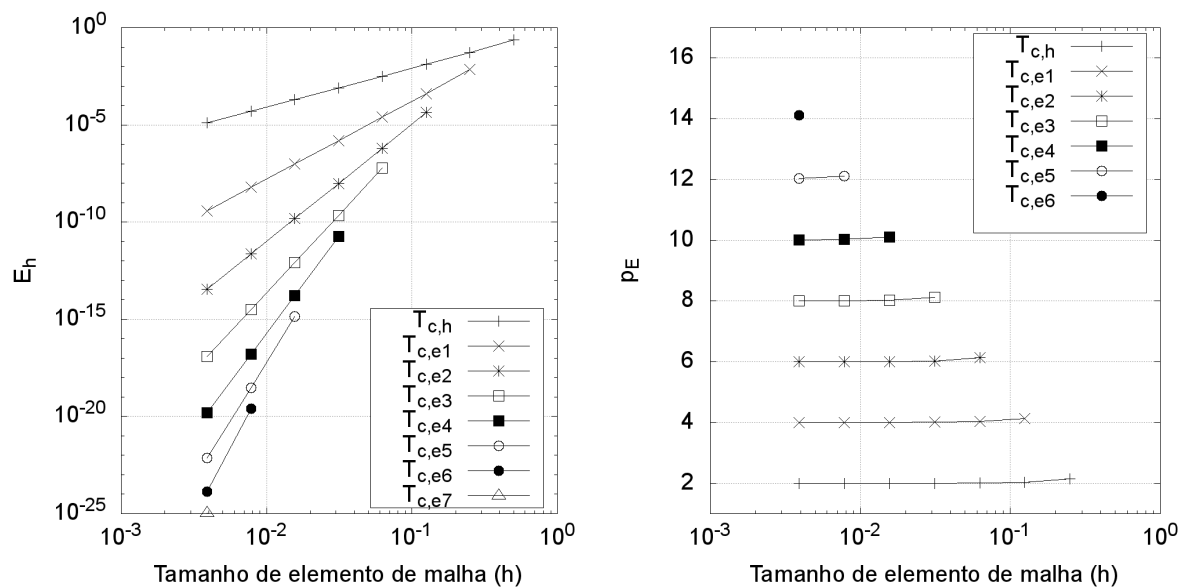
N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}$	RAM (MB)	tCPU
$3^3$	Analítico	HDMA	1	1	0	4,3	0,000 s
$5^3$	$\phi_{an}$	HDMA	16	29	$2,4 \times 10^{-34}$	4,4	0,001 s
$9^3$	$\phi_{an,bc}$	HDMA	22	39	$2,6 \times 10^{-34}$	4,4	0,035 s
$17^3$	$\phi_{an,bc}$	HDMA	26	45	$3,5 \times 10^{-34}$	5,1	0,728 s
$33^3$	$\phi_{an,bc}$	HDMA	28	47	$4,5 \times 10^{-34}$	10,0	12,83 s
$65^3$	$\phi_{an,bc}$	HDMA	28	45	$6,2 \times 10^{-34}$	47,3	3,17 min
$129^3$	$\phi_{an,bc}$	HDMA	25	37	$8,8 \times 10^{-34}$	340,4	38,7 min
$257^3$	$\phi_{an,bc}$	HDMA	20	37	$1,2 \times 10^{-33}$	2661,8	10,5 h

#### 4.13.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidas são semelhantes aos da seção 4.1.2 e estão presentes no apêndice B. Percebe-se que há uma redução progressiva no erro de iteração, chegando-se claramente à ordem 6 e provavelmente se houvesse mais malhas chegaria-se a valores cada vez menores.

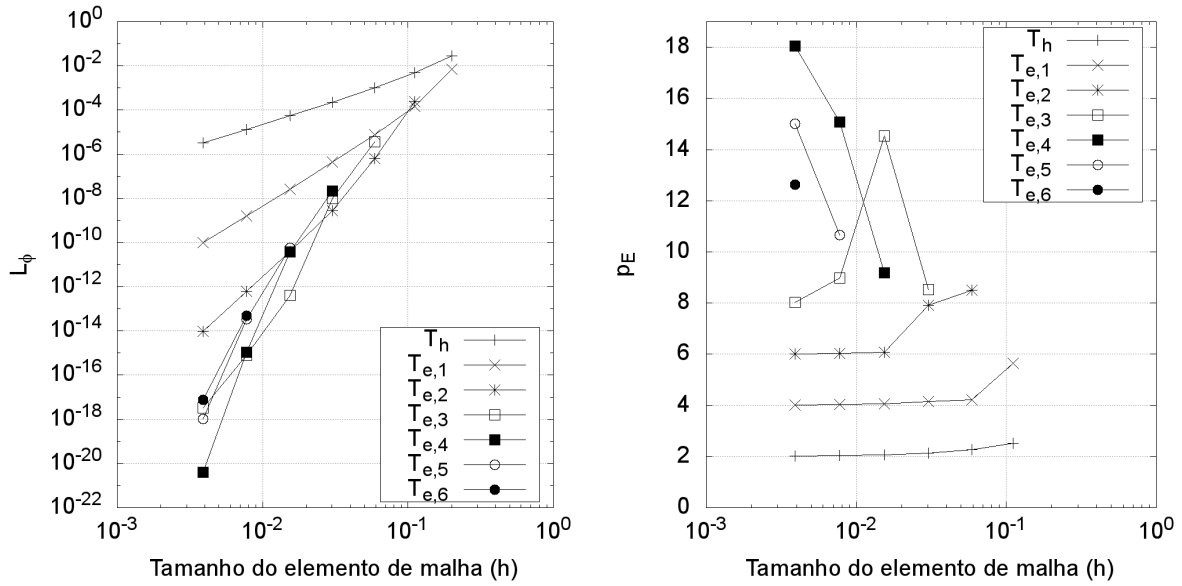
#### 4.13.2 Erro de discretização

Com o uso de MER, as três variáveis analisadas  $T_c$ ,  $T_m$  e  $Q_e$  apresentaram o comportamento esperado no caso das múltiplas extrapolações de Richardson como pode ser analisado na Fig. 4.47. Apenas a variável  $T_c$  é mostrada aqui; no Apêndice A estão as demais figuras.

Figura 4.47 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $T_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D DF.

No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.48. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 8 e um erro mínimo de  $1,1 \times 10^{-20}$  na malha  $257^2$  na extrapolação 4.

Figura 4.48 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D DF.



## 4.14 POISSON 3D VF

No problema modelo utilizando volumes finitos foi implementada a metodologia multigrid e as malhas utilizadas foram:  $2^3$ ,  $4^3$ ,  $8^3$ ,  $16^3$ ,  $32^3$ ,  $64^3$ ,  $128^3$ ,  $256^3$  e  $512^3$ . O solver utilizado foi Gauss-Seidel com metodologia multigrid de correções aditivas com ponderação sobre a correção. Os resultados gerais das soluções exatas estão na Tab. 4.18. Neste caso foram obtidos os resultados numéricos exatos de cada um dos tamanhos de problema.

### 4.14.1 Erro de iteração

Os resultados e análises obtidas são semelhantes aos da seção 4.1.2 e estão presentes no apêndice B. Percebe-se que há uma redução progressiva no erro de iteração, chegando-se claramente à ordem 6 e provavelmente se houvesse mais malhas chegaria-se a valores cada vez menores.

### 4.14.2 Erro de discretização

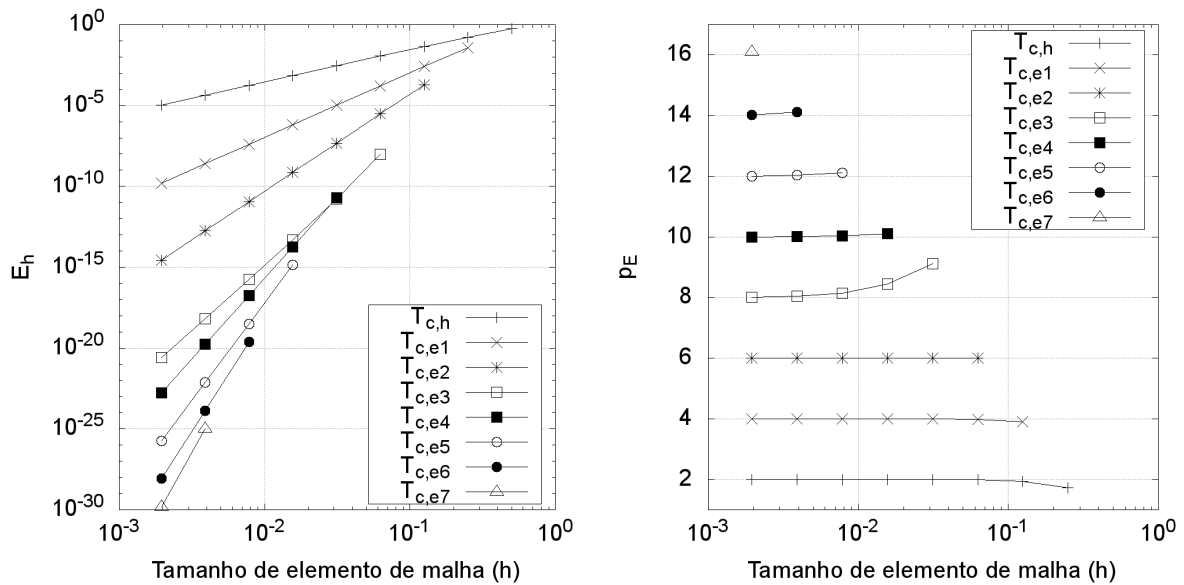
Com o uso de MER, as três variáveis analisadas  $T_c$ ,  $T_m$  e  $Q_e$  apresentaram o comportamento esperado no caso das múltiplas extrapolações de Richardson como pode



Tabela 4.18 – Resultados gerais das simulações para obtenção das soluções exatas do problema Poisson 3D VF.

N	CI	Solver	it(Ei)	itmax	$\overline{L}_{1r}$	RAM (MB)	tCPU
$2^3$	Analítico	GS MGCA	114	217	$2,4 \times 10^{-35}$	6,3	0,203 s
$4^3$	Analítico	GS MGCA	44	85	$4,0 \times 10^{-35}$	6,4	0,140 s
$8^3$	Analítico	GS MGCA	51	97	$4,6 \times 10^{-35}$	6,6	0,203 s
$16^3$	Analítico	GS MGCA	50	95	$7,7 \times 10^{-35}$	7,4	0,827 s
$32^3$	Analítico	GS MGCA	51	97	$8,7 \times 10^{-35}$	12,9	5,2 s
$64^3$	Analítico	GS MGCA	57	109	$9,3 \times 10^{-35}$	53,5	43,6 s
$128^3$	Analítico	GS MGCA	65	121	$9,7 \times 10^{-35}$	363,0	6,16 min
$256^3$	Analítico	GS MGCA	75	135	$9,9 \times 10^{-35}$	2777,9	52,3 min
$512^3$	$\phi_{an,bc}$	GS MGCA	42	75	$1,0 \times 10^{-34}$	$\approx 21000$	7,0 h

ser analisado na Fig. 4.49. Apenas a variável  $T_c$  é mostrada aqui; no Apêndice A estão as demais figuras.

Figura 4.49 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $T_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D VF.

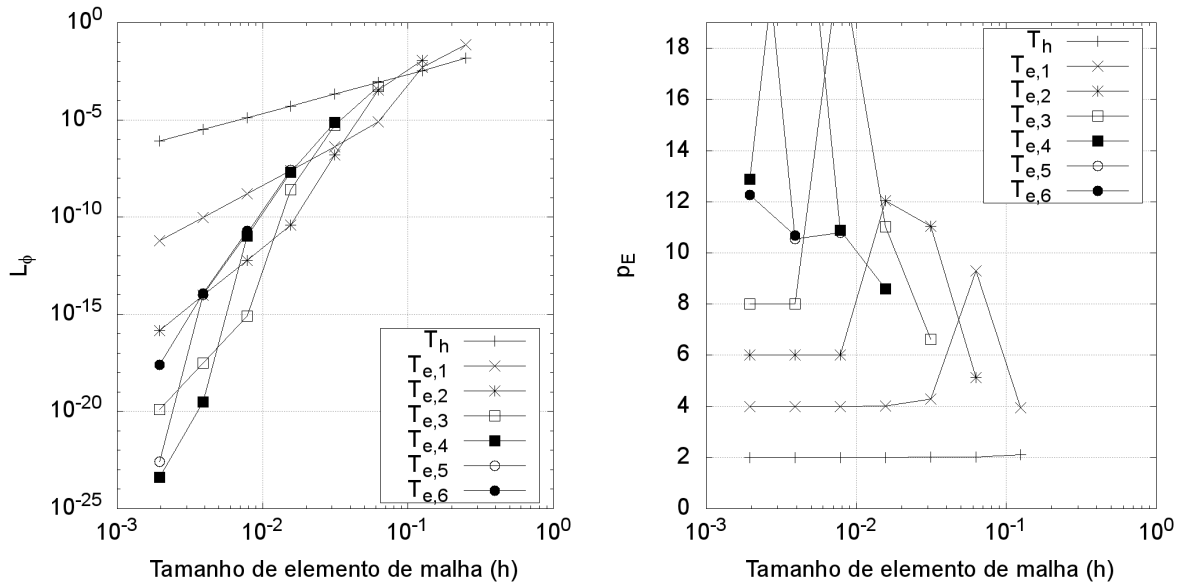
No caso de CRE, o método foi aplicado para todo o campo de soluções conforme está mostrado na Fig. 4.50. Percebe-se que foi possível reduzir o erro de discretização de todo o campo de soluções até uma ordem tendendo a 12 e um erro mínimo de  $4,0 \times 10^{-24}$  na malha  $512^2$  na extrapolação 4.

## 4.15 RESUMO DOS RESULTADOS

Os resultados estão resumidos para todos os problemas testados como segue:

No âmbito dos **solvers**:

Figura 4.50 –  $L_\phi$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D VF.



**Laplace 2D** O solver que apresentou menor tempo computacional é o PDMA, seguindo do MSI, Gauss-Seidel e ADI.

**Advecção-Difusão 2D** O solver que apresentou menor tempo computacional é o PDMA, seguindo do MSI e o Gauss-Seidel.

No âmbito dos **Erros de iteração**  $Li_0$ :

**Laplace 2D** Todos os métodos de estimativa inicial funcionaram, não foi notado nenhum limite. O mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa  $\phi_{an,pc}$  é de  $6,8 \times 10^{-32}$  em diferenças finitas e em volumes finitos na estimativa  $\phi_{an,bc}$  é de  $9,5 \times 10^{-21}$ .

**Advecção-Difusão 2D** Um limite de ordem 6 foi notado nos métodos de estimativa inicial em diferenças finitas, o mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa  $\phi_{an,bc}$  é de  $7,7 \times 10^{-21}$  e  $1,2 \times 10^{-21}$  nas duas variações testadas respectivamente. Já em volumes finitos um limite de ordem 4 foi notado, o mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa  $\phi_{an,bc}$  é de  $1,1 \times 10^{-15}$  e  $8,5 \times 10^{-17}$  nas duas variações testadas respectivamente.

**Burgers 2D** Um limite de ordem 6 foi notado tanto para  $U$  quanto para  $V$  nos métodos de estimativa inicial em diferenças finitas, o mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa  $\phi_{an,bc}$  é de  $4,2 \times 10^{-20}$  tanto para  $U$  quanto para  $V$ . Já em volumes finitos um limite de ordem 4 e 6 foram notados para  $U$  e  $V$  respectivamente, o mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa  $\phi_{an,bc}$  é de  $4,3 \times 10^{-15}$  e  $5,7 \times 10^{-19}$  para  $U$  e  $V$  respectivamente.

**Navier-Stokes 2D** Um limite de ordem 8 foi notado para  $\psi$  e 6 para  $\omega$  nos métodos de estimativa inicial em diferenças finitas, o mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa

$\phi_{an,trc}$  para  $\psi$ :  $6,1 \times 10^{-25}$  e na estimativa  $\phi_{an,bc}$  para  $\omega$ :  $1,5 \times 10^{-19}$ . Em volumes finitos um limite de ordem 6 foi notado tanto para  $\psi$  quanto para  $\omega$ , o mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa  $\phi_{an,bc}$  é de  $4,9 \times 10^{-20}$  e  $8,0 \times 10^{-19}$  para  $\psi$  e  $\omega$  respectivamente.

**Laplace 3D** Todos os métodos de estimativa inicial funcionaram como no Laplace 2D, o mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa  $\phi_{an,tec}$  é de  $4,4 \times 10^{-16}$  em diferenças finitas e em volumes finitos na estimativa  $\phi_{an,bc}$  é de  $2,0 \times 10^{-11}$ .

**Poisson 3D** Todos os métodos de estimativa inicial funcionaram como no Laplace 2D, o mínimo de  $Li_0$  foi obtido na estimativa  $\phi_{an,tec}$  é de  $3,6 \times 10^{-20}$  em diferenças finitas e em volumes finitos na estimativa  $\phi_{an,bc}$  é de  $6,6 \times 10^{-15}$ .

No âmbito dos **Erros de iteração**  $t_{CPU}$ :

**Laplace 2D** Para uma tolerância de  $10^{-10}$  para  $Li_i$ , nota-se que as estimativas iniciais  $\phi_h$ ,  $\phi_{h,bc}$ ,  $\phi_{an}$ ,  $\phi_{an,bc}$  resultam em tempo computacional semelhantes entre si e menores do que as estimativas Nula, Analítico, Interpolado e  $\phi_\infty$ . A redução no tempo computacional é de duas ordens de grandeza na malha  $2049^2$  e maior ainda em comparação a estimativa Nula.

**Advecção-Difusão 2D** Para uma tolerância de  $10^{-10}$  para  $Li_i$ , nota-se que as estimativas iniciais  $\phi_h$ ,  $\phi_{h,bc}$ ,  $\phi_{an}$ ,  $\phi_{an,bc}$  resultam em tempo computacional semelhantes entre si embora quanto maior a ordem de acurácia do erro de iteração verdadeiro menor é o tempo computacional e menores do que as estimativas Nula, Analítico, Interpolado e  $\phi_\infty$ . A redução no tempo computacional é de três ordens de grandeza na malha  $1025^2$  e maior ainda em comparação a estimativa Nula.

**Burgers 2D** Para uma tolerância de  $10^{-10}$  para  $Li_i$  e método multigrid, nota-se pouca diferença nos resultados de tempo de CPU para todas as estimativas iniciais: a melhor estimativa inicial é a analítica, seguidas de  $\phi_{an,bc}$ ,  $\phi_{an}$ ,  $\phi_{h,bc}$ ,  $\phi_h$ , interpolado,  $\phi_\infty$  e nulo.

**Navier-Stokes 2D** Para uma tolerância de  $10^{-10}$  para  $Li_i$  e método multigrid, nota-se pouca diferença nos resultados de tempo de CPU para todas as estimativas iniciais: a melhor estimativa inicial é a analítica, seguidas de  $\phi_{an}$ ,  $\phi_{h,bc}$ ,  $\phi_h$ , interpolado,  $\phi_\infty$ ,  $\phi_{an,bc}$  e nulo.

No âmbito dos **Erros de discretização**  $E_h$ :

**Laplace 2D** As variáveis secundárias na qual MER foi aplicado seguiram o comportamento esperado, ou seja, quanto maior o número de extrapolações aplicado menor

será o erro de discretização e maior a ordem de acurácia obtida até que o erro de arredondamento seja superior ao erro de discretização.

**Advecção-Difusão 2D** A variável  $T_c$  apresenta o comportamento esperado de MER embora a variável  $T_m$  apresente um limite de acurácia de ordem 6 em diferenças finitas e 5 em volumes finitos nas duas variações testadas.

**Burgers 2D** As variáveis secundárias na qual MER foi aplicado apresentaram comportamentos distintos: a variável  $u_c$  apresentou tendência a ordem 14 na malha  $1025^2$  chegando ao erro de arredondamento em diferenças finitas mas em volumes finitos o limite de acurácia de 6 foi obtido, já  $v_c$  apresentou limite de acurácia de ordem 10 não chegando ao erro de arredondamento em diferenças finitas e limite de acurácia de 8 em volumes finitos e comportamento similar foi obtido para  $\dot{m}$  tanto em diferenças finitas quanto volumes finitos.

**Navier-Stokes 2D** As variáveis secundárias na qual MER foi aplicado apresentaram comportamentos distintos: a variável  $u_c$  apresentou tendência a ordem 10 não chegando ao erro de arredondamento mas em volumes finitos o limite de acurácia de 11 foi obtido,  $v_c$  apresentou limite de acurácia de ordem 10 não chegando ao erro de arredondamento tanto em diferenças finitas quanto em volumes finitos e para  $\dot{m}$  em diferenças finitas houve alguma degeneração da variável, fato ainda não conhecido, a qual as ordens verdadeiras se tornaram: 2, 3, 4... atingindo-se assim ordem 9, já volumes finitos isto não ocorreu e obteve-se ordem verdadeira próxima de 12.

**Laplace 3D** As variáveis secundárias na qual MER foi aplicado seguiram o comportamento esperado, ou seja, quanto maior o número de extrapolações aplicado menor será o erro de discretização e maior a ordem de acurácia obtida, no caso foi possível obter até  $15^a$  ordem de acurácia tanto em diferenças finitas quanto volumes finitos.

**Poisson 3D** As variáveis secundárias na qual MER foi aplicado seguiram o comportamento esperado, ou seja, quanto maior o número de extrapolações aplicado menor será o erro de discretização e maior a ordem de acurácia obtida, no caso foi possível obter até  $14^a$  a  $16^a$  ordem de acurácia em diferenças finitas e volumes finitos.

No âmbito de **CRE e Limite de acurácia:**

**Laplace 2D** Não ficou evidente nenhum limite de acurácia, embora observou-se uma ordem máxima de 14 na malha  $513^2$  em diferenças finitas e mínimo valor de  $2,1 \times 10^{-32}$  para  $L_\phi$  na extrapolação 6 e ordem máxima de 12 na malha  $2048^2$  em volumes finitos na extrapolação 5 e mínimo valor de  $6,6 \times 10^{-33}$  para  $L_\phi$ .

**Advecção-Difusão 2D** O limite de acurácia segue o mesmo que nas variáveis anteriores, portanto em diferenças finitas obteve-se ordem 6 de acurácia e mínimo valor de

$1,2 \times 10^{-21}$  e  $1,8 \times 10^{-22}$  para  $L_\phi$  nas duas variações testadas na extrapolação 6 e em volumes finitos obteve-se ordem 4 de acurácia, na extrapolação 3 o mínimo valor de  $1,5 \times 10^{-15}$  e  $1,1 \times 10^{-16}$  para  $L_\phi$ .

**Burgers 2D** O limite de acurácia obtido em diferenças finitas foi de 6 e 8 para U e V respectivamente com mínimos valores de  $3,3 \times 10^{-21}$  e  $7,3 \times 10^{-25}$  para  $L_\phi$  em U e V respectivamente. Já em volumes finitos obteve-se limite de acurácia de 4 e 6 para U e V respectivamente com mínimos valores de  $5,6 \times 10^{-15}$  e  $1,1 \times 10^{-19}$  para  $L_\phi$  em U e V respectivamente.

**Navier-Stokes 2D** O limite de acurácia obtido em diferenças finitas foi de 8 e 6 para  $\psi$  e  $\omega$  respectivamente com mínimos valores de  $2,4 \times 10^{-26}$  e  $2,0 \times 10^{-20}$  para  $L_\phi$  em  $\psi$  e  $\omega$  respectivamente. Já em volumes finitos obteve-se limite de acurácia de 6 para ambas variáveis com mínimos valores de  $9,4 \times 10^{-21}$  e  $1,5 \times 10^{-19}$  para  $L_\phi$  em  $\psi$  e  $\omega$  respectivamente.

**Laplace 3D** Não ficou evidente nenhum limite de acurácia, embora observou-se uma tendência a ordem máxima de 14 na malha 513<sup>3</sup> em diferenças finitas e mínimo valor de  $3,5 \times 10^{-21}$  para  $L_\phi$  na extrapolação 5 e ordem máxima de 12 na malha 513<sup>3</sup> em volumes finitos na extrapolação 5 e mínimo valor de  $5,3 \times 10^{-20}$  para  $L_\phi$ .

**Poisson 3D** Não ficou evidente nenhum limite de acurácia, embora observou-se uma tendência a ordem máxima de 8 na malha 257<sup>3</sup> em diferenças finitas e mínimo valor de  $1,1 \times 10^{-20}$  para  $L_\phi$  na extrapolação 4 e ordem máxima de 12 na malha 512<sup>3</sup> em volumes finitos na extrapolação 4 e mínimo valor de  $4,0 \times 10^{-24}$  para  $L_\phi$ .

No âmbito das **Comparações com as duas variações no problema Advecção-Difusão 2D**:

**Advecção-Difusão 2D** Não houve variação no comportamento das variáveis de interesse ao modificar-se a solução fabricada e anulando o termo fonte do modelo matemático, significando que o limite de acurácia neste problema é independente da solução (fabricada ou não).

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo desenvolver técnicas para reduzir os erros de iteração e discretização em CFD. Foram introduzidos fundamentos de erros numéricos, estimativas de erro, métodos numéricos de diferenças finitas e volumes finitos, conceitos necessários para a compreensão das técnicas desenvolvidas.

As metodologias desenvolvidas foram testadas em seis problemas modelo, ou ainda, seis equações diferenciais: Laplace 2D, Advecção-Difusão 2D, Burgers 2D, Navier-Stokes 2D, Laplace 3D e Poisson 3D.

São apresentadas as diferentes abordagens desenvolvidas para a interpolação aplicadas em diferenças finitas e volumes finitos e também as diferentes formas de redução dos erros de discretização e iteração.

Os resultados das formas de redução dos erros de iteração e discretização para todos os problemas modelo, tanto em diferenças finitas quanto em volumes finitos, são evidenciados e podem ser resumidos como segue.

Os métodos de estimativa inicial apresentaram acurácia na redução do erro de iteração verdadeiro como segue: estimativas analítica, interpolado e  $\phi_\infty$  tenderam a 2,  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  tenderam a 4,  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$  tenderam a 6,  $\phi_{h,trc}$  e  $\phi_{an,trc}$  tenderam a 8,  $\phi_{h,tec}$  e  $\phi_{an,tec}$  tenderam a 10 e o método  $\phi_{an,pc}$  deveria tender a 12 embora não tenha sido confirmado com os testes deste trabalho pois o erro de arredondamento se tornou mais significativo.

Os resultados que corroboram esta afirmação foram obtidos no problema Laplace 2D, Laplace 3D e Poisson 3D em diferenças finitas. Quanto maior a acurácia na redução do erro de iteração verdadeiro menor é esperado que seja o valor absoluto deste erro.

No entanto nos demais casos surge um limite de acurácia tanto na redução do erro de iteração quanto no erro de discretização e o valor deste limite depende do problema.

Este efeito ainda está em estudo, sabe-se que quando isto ocorre, surge a partir das fronteiras do domínio oscilações no erro de discretização ou iteração, estas oscilações são independentes do grau de interpolação aplicado tanto em diferenças finitas quanto volumes finitos. Nos casos mencionados acima (Laplace 2D, Laplace 3D e Poisson 3D) não se nota este fenômeno e o limite de acurácia não ocorre.

Os métodos que seguem a metodologia CRE com interpolações utilizando diferenças divididas de Newton apresentaram acurácia na redução do erro numérico, tanto na forma pontual quanto global com as variáveis secundárias e na forma global com a variável  $L_\phi$ . Considerando apenas a variável  $L_\phi$  as ordens verdadeiras obtidas para o MDF são como segue: 14, 6, 6/8, 8/6, 14 e 8 nos problemas Laplace 2D, Advecção-Difusão 2D, Burgers

2D U/V, Navier-Stokes 2D  $\psi/\omega$ , Laplace 3D e Poisson 3D, respectivamente. Nos mesmos problemas para MVF obteve-se: 14, 4, 4/6, 6/6, 14 e 12.

O motivo da diferença entre as ordens de acurácia máximas obtidas com MDF e MVF ainda está em investigação. Possivelmente a causa seria no objeto de interpolação, o qual reduz a ordem aproximadamente por  $d_p$  ( $d_p$  é a diferença entre duas ordens verdadeiras consecutivas dos termos do erro de discretização).

Em MDF interpola-se apenas a correção de Richardson entre malhas, enquanto que em MVF interpola-se a própria solução para coincidir as soluções entre as malhas.

Apenas em um caso esta hipótese não é válida: no problema Navier-Stokes 2D comparando o limite de acurácia de  $\omega$  tanto em MDF quanto MVF o qual resultou na acurácia 6 em ambos.

## 5.1 CONTRIBUIÇÕES

Os principais resultados da tese e também as contribuições para o estado da arte são:

1. Em diferenças finitas ao modificar-se a interpolação no método CRE para até 15º grau alcançou-se as seguintes ordens verdadeiras da variável primária em todo o campo: 14, 6, 6/8, 8/6, 14 e 8 nos problemas Laplace 2D, Advecção-Difusão 2D, Burgers 2D U/V, Navier-Stokes 2D  $\psi/\omega$ , Laplace 3D e Poisson 3D respectivamente.
2. Em volumes finitos ao se modificar a interpolação no método CRE para até 15º grau alcançou-se as seguintes ordens verdadeiras da variável primária em todo o campo: 14, 4, 4/6, 6/6, 10 e 10 nos problemas Laplace 2D, Advecção-Difusão 2D, Burgers 2D U/V, Navier-Stokes 2D  $\psi/\omega$ , Laplace 3D e Poisson 3D respectivamente.
3. Primeira aparição na literatura de uma estimativa inicial baseada em CRE para redução do erro de iteração em problemas 2D e 3D em diferenças finitas e volumes finitos atingindo até 10ª ordem de acurácia (possivelmente até 12ª) com solução analítica e 10ª ordem de acurácia sem solução analítica.
4. Nota-se que se há algum limite de ordem verdadeira obtido em CRE para  $E_h$ , como mostrado nos problemas: Advecção-Difusão 2D, Burgers 2D e Navier-Stokes 2D, este mesmo limite se mostrará também para a estimativa inicial, uma vez que ambos dependem das estimativas do erro de discretização ou ainda da solução analítica do problema.
5. Quanto mais acurada é a estimativa inicial utilizada menor é o tempo computacional em problemas sem multigrid, tornando até o coeficiente de complexidade próximo da unidade, como observado em problemas com multigrid.

6. Primeiro uso de CRE para redução do erro de discretização em variáveis primárias para problemas 3D em volumes finitos e diferenças finitas atingindo até 14ª ordem de acurácia.
7. Primeira vez que o erro de discretização foi reduzido com MER em variáveis primárias e secundárias em problemas 3D no método de volumes finitos atingindo até 10ª ordem de acurácia.
8. Desenvolvimento e redução de custo computacional dos métodos PDMA e HDMA presentes no apêndice C.

## 5.2 TRABALHOS FUTUROS

São listados possíveis trabalhos futuros para investigar melhor os efeitos dos erros de discretização e iteração:

1. Em problemas com multigrid não foi possível analisar uma melhoria nos tempos de CPU ao utilizar os métodos de estimativa inicial. Provavelmente o tempo utilizado pelo método de estimativa inicial não compensa a taxa de redução do erro de iteração dos ciclos  $V$ , no entanto mais testes são necessários com as demais formas de estimativa de erro de iteração e comparação de tempos de CPU.
2. Investigar os motivos para o fato de aparecer um limite na ordem verdadeira atingida ao utilizar-se CRE, estimativas iniciais e/ou MER. Motivo provável seria alguma descontinuidade nas derivadas da solução ou algo semelhante.
3. Comparar o erro de discretização e sua ordem efetiva com a estimativa do erro de discretização e sua ordem aparente e analisar se os limites encontrados das ordens verdadeiras são semelhantes.
4. Aplicar a metodologia apresentada tanto para redução do erro de iteração quanto discretização em problemas sem solução analítica os quais possuem solução numérica amplamente difundida, como é o problema da cavidade 2D e 3D e realizar comparações.
5. Investigar o motivo pelo qual o limite de acurácia global obtido por CRE não coincide necessariamente com o limite de acurácia das variáveis secundárias pontuais ou locais.
6. Investigar o motivo de que um fator de ponderação na correção de 1 a 2 aumentou a taxa de convergência de problemas com multigrid, sendo que esta fato ocorreu no MCGA no presente trabalho. Mesmo efeito foi notado no problema Burgers e Navier-Stokes 2D DF os quais utilizam a metodologia FAS.



# REFERÊNCIAS

- ALVES, A. C. **Verificação de soluções numéricas da equação de Laplace 2D com malhas triangulares e múltiplas extrapolações De Richardson**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2010.
- ANUNCIAÇÃO, M. A. M. **Redução do erro de iteração e aceleração do método multigrid com o uso de extrapoladores**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2013.
- ASME. **Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer - V&V 20-2009 - The American Society of Mechanical Engineers**. 2009.
- BASTO, M.; SEMIAO, V.; CALHEIROS, F. Dynamics and synchronization of numerical solutions of the burgers equation. **Journal of Computational Applied Mathematics**, v. 231, p. 793–806, 2009.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. **A *multigrid* tutorial**. 2. ed. Philadelphia: SIAM, 2000.
- BRÈTHES, G.; ALLAIN, O.; DERVIEUX, A. A mesh-adaptive metric-based full multigrid for the poisson problem. **International journal for numerical methods in fluids**, v. 79, p. 30–53, 2015.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2008.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Numerical Methods for Engineers**. 7. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015.
- DAHLQUIST, G.; BJORCK, A. **Numerical methods in scientific computing**. Philadelphia: SIAM, 2008. v. 1.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. **Computational methods for fluid dynamics**. 3. ed. New York: Springer, 2002.
- FILHO, F. C. d. S. Modelagem de problemas de engenharia: Solução de equações diferenciais parciais pelo método dos elementos finitos. **Revista Tecnologia**, Fortaleza, v. 26, p. 134–144, 2005.
- FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. São Paulo: Edusp, 2000.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- FROMM, J. E. The time dependent flow of an incompressible viscous fluid. **Methods of Computational Physics**, v. 3, p. 345–382, 1964.

GE, Y. Multigrid method and fourth-order compact difference discretization scheme with unequal meshsizes for 3d poisson equation. **Journal of Computational Physics**, v. 229, p. 6381–6391, 2010.

GIACOMINI, F. F. **Multiextrapolação de Richardson completa para reduzir o erro de discretização**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2013.

GONÇALVES, S. F. T. **Estudo de parâmetros do método multigrid geométrico para equações 2D em CFD e volumes finitos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Florianópolis, SC, 2013.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

KELLER, S. C. **O método multigrid de correções aditivas para a solução numérica acoplada das equações de Navier-Stokes com malhas não-estruturadas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2007.

KNUPP, P. M.; SALARI, K. Verification of computer codes in computational science and engineering. **Chapman & Hall/CRC**, 2003.

KREYSZIG, E. **Advanced engineering mathematics**. 8. ed. New York: Wiley, 1999.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. rev. e ampliada, [reimpr.], Rio de Janeiro: LTC, 2010.

MANIKONDA, S.; BERZ, M.; MAKINO, K. High-order verified solutions of the 3d laplace equation. **Transactions on Computers**, v. 4, p. 1604–1610, 2005.

MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2001.

MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A. Effect of p-norms on the accuracy order of numerical solutions errors in CFD. **Proceedings of 13th Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas e Engenharia**, Uberlandia - MG, 2010.

MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D.; VARGAS, A. P. S. Highly accurate numerical solutions with repeated richardson extrapolation for 2d laplace equation. **Applied Mathematical Modelling**, Maceió - AL, v. 37, p. 7386–7397, 2013.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Condições suficientes para estimar com acurácia e confiabilidade erros de discretização em CFD. **Proceedings of 20th Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**, São Paulo, 1999.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 42, p. 167–188, 2002.

- MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024x1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 31, p. 186–198, 2009.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Estimate of iteration errors in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 53, n. 1, p. 234–245, 2008.
- MORO, D. F.; MARCHI, C. H. Solução da equação de Poisson 3D com múltiplas extrapolações de Richardson. **Proceedings of 1th Congresso Brasileiro de Fluidodinâmica Computacional**, Campina Grande - PB, 2016.
- MORO, D. F.; MARCHI, C. H. Study of additive correction multigrid application. **Proceedings of Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE**, 2017.
- MORO, D. F.; MARCHI, C. H.; PINTO, M. V. Um método iterativo eficiente para resolver sistemas de equações pentadiagonais. **Proceedings of 3rd Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CMAC Sudeste**, 2015.
- PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. Washington: Taylor & Francis, 1980.
- PAZ, R. R.; NIGRO, N. M.; STORTI, M. A. On the efficiency and quality of numerical solutions in CFD problems. **International Journal of Numerical Methods in Fluids**, v. 52, p. 89–118, 2006.
- PEACEMAN, D. W.; RACHFORD, H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. **J. Soc. Ind. Appl. Math**, v. 3, p. 28–41, 1955.
- RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The deferred approach to the limit. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 226, p. 299–361, 1927.
- ROACHE, P. J. Perspective: A method for uniform reporting of grid refinement studies. **Journal of Fluids Engineering**, v. 116, p. 405–413, 1994.
- ROACHE, P. J. **Fundamentals of computational fluid dynamics**. Albuquerque: Hermosa Publishers, 1998.
- ROACHE, P. J.; KNUPP, P. M. Completed richardson extrapolation. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 9, p. 365–374, 1993.
- ROY, C. J.; BLOTTNER, J. R. Assessment of one- and two-equation turbulence models for hypersonic transitional flows. **J. Spacecraft Rockets**, v. 38, p. 699–710, 2001.
- SANTIAGO, C. D. **Estudo de parâmetros do método *multigrid* para sistemas de equações 2D em CFD**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2010.
- SCHNEIDER, F. A. **Verificação de soluções numéricas em problemas difusivos e advectivos com malhas não-uniformes**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2007.
- SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M. A. A modified strongly implicit procedure for numerical solution of field problems. **Numerical Heat Transfer**, v. 4, p. 1–19, 1981.

SHIH, T. M.; TAN, C. H.; HWANG, B. C. Effects of grid staggering on numerical schemes. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 9, p. 193–212, 1989.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. Washington: Taylor & Francis, 1997.

THEKALE, A.; GRADL, T.; KLAMROTH, K.; RÜDE, U. Optimizing the number of multigrid cycles in the full multigrid algorithm. **Numerical linear algebra with applications**, v. 17, p. 199–210, 2010.

THOMAS, L. H. Elliptic problems in linear differential equations over a network. **Watson Sci. Comput. Lab Report**, 1949.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method**. 2. ed. Harlow, England: Prentice Hall, 2007.

YAN, J.; THIELE, F.; XUE, L. A modified full multigrid algorithm for the Navier-Stokes equations. **Computer & Fluids**, v. 36, p. 445–454, 2007.

## Apêndices

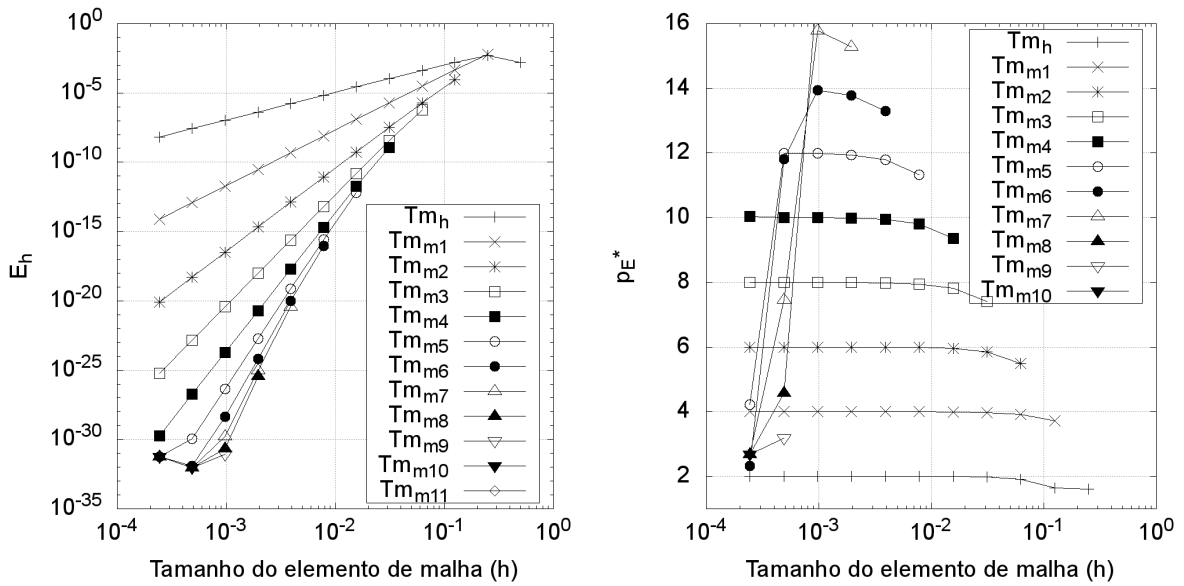
# APÊNDICE A – ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Neste apêndice são apresentados os gráficos complementares referentes aos erros de discretização.

## A.1 LAPLACE 2D DF

É apresentado na Fig. A.1 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.1 – Erro de discretização da variável  $T_m$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D DF.



É apresentado na Fig. A.2 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

## A.2 LAPLACE 2D VF

É apresentado na Fig. A.3 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.2 – Erro de discretização da variável  $Q_e$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D DF.

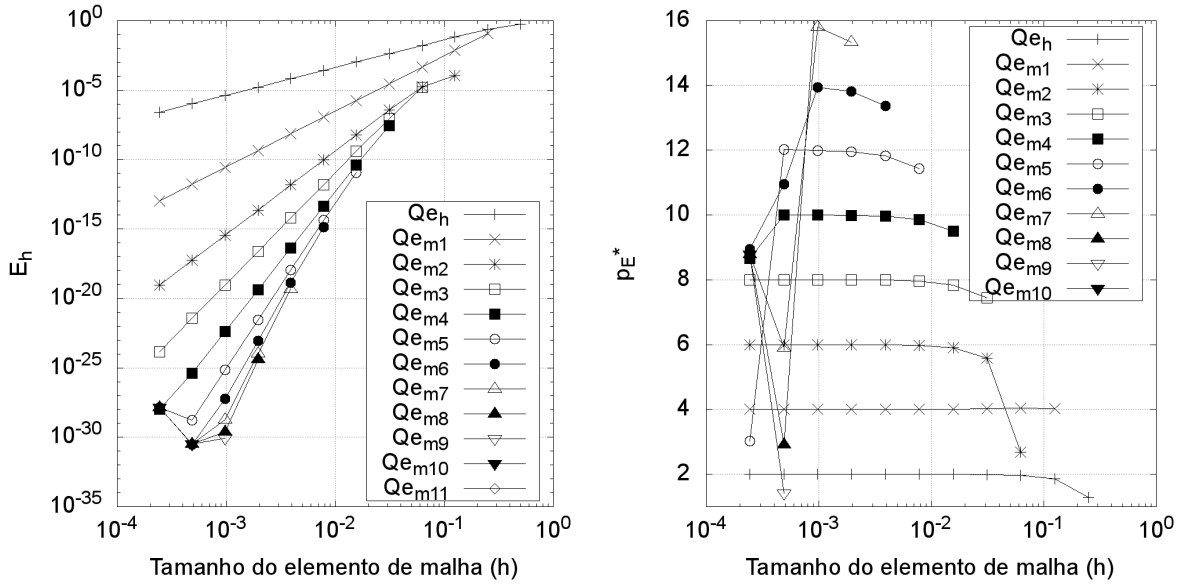
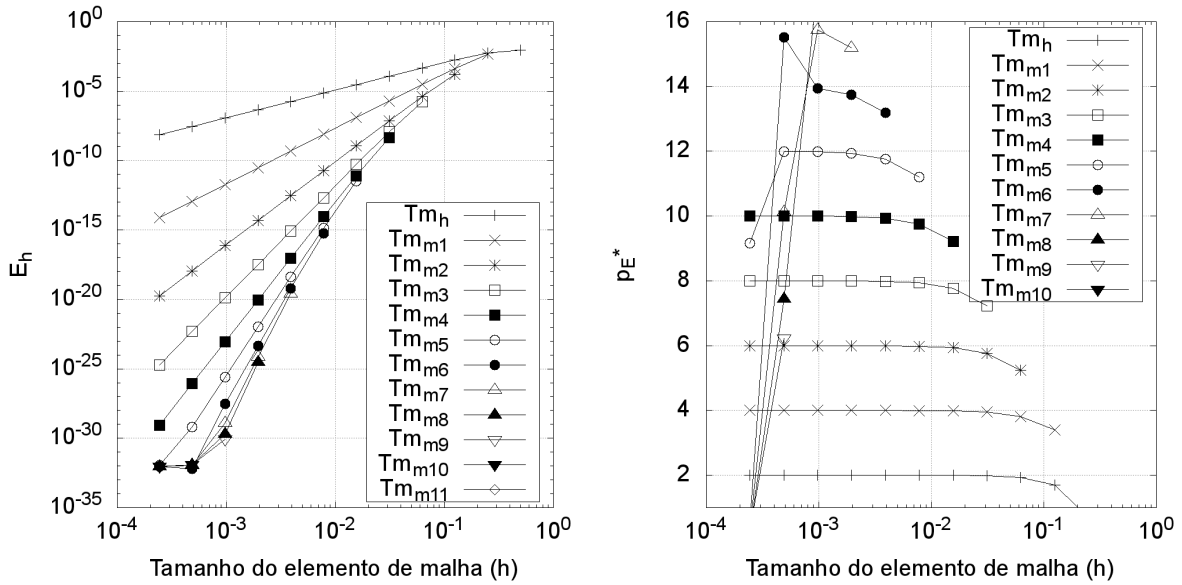


Figura A.3 – Erro de discretização da variável  $T_m$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D VF.

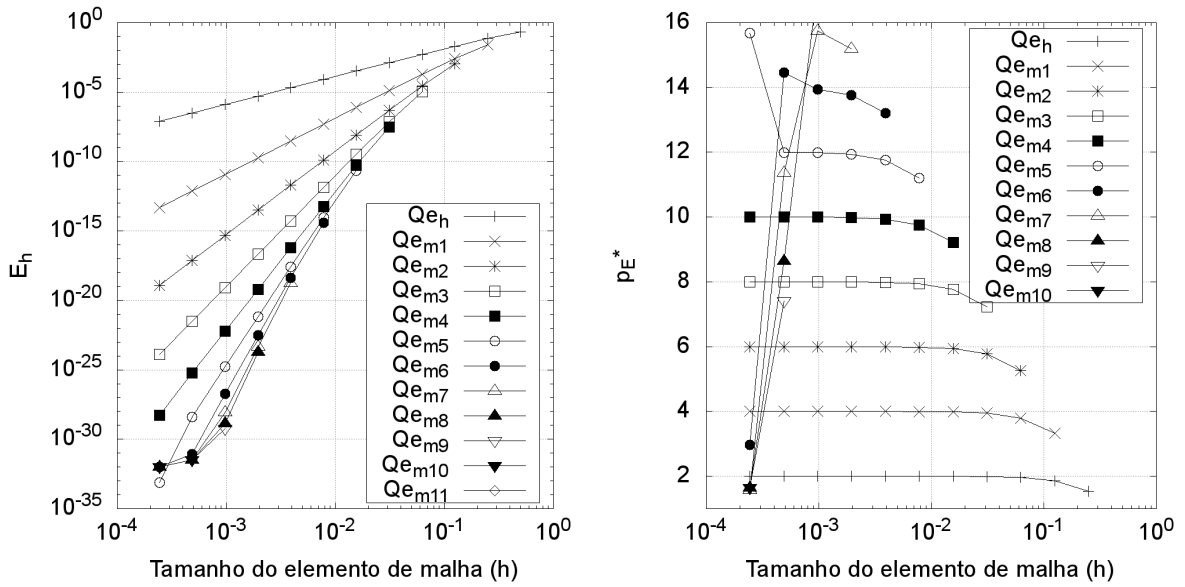


É apresentado na Fig. A.4 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

### A.3 BURGERS 2D DF

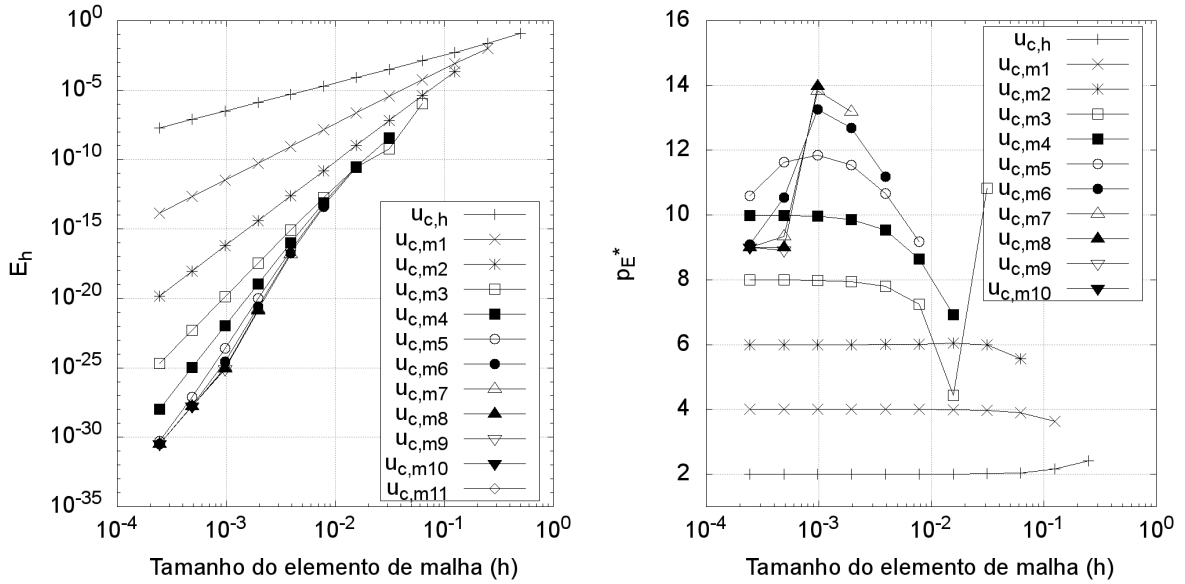
É apresentado na Fig. A.5 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $u_c$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação

Figura A.4 – Erro de discretização da variável  $Q_e$  e sua ordem efetiva equivalente em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 2D VF.



utilizados.

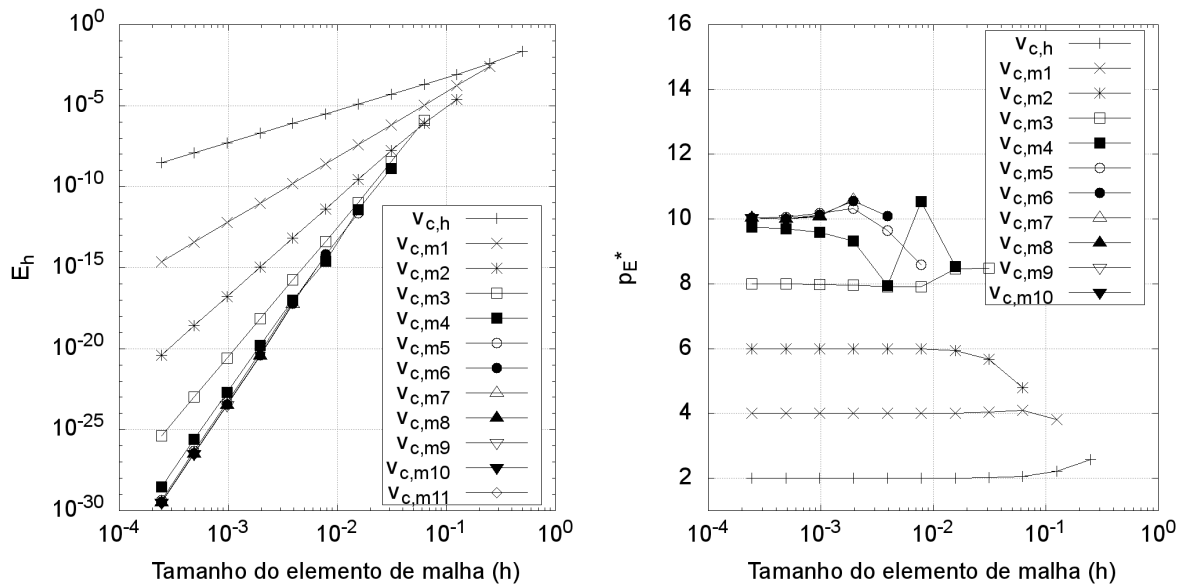
Figura A.5 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $u_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF.



Na Fig. A.6 é apresentado o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $v_c$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.



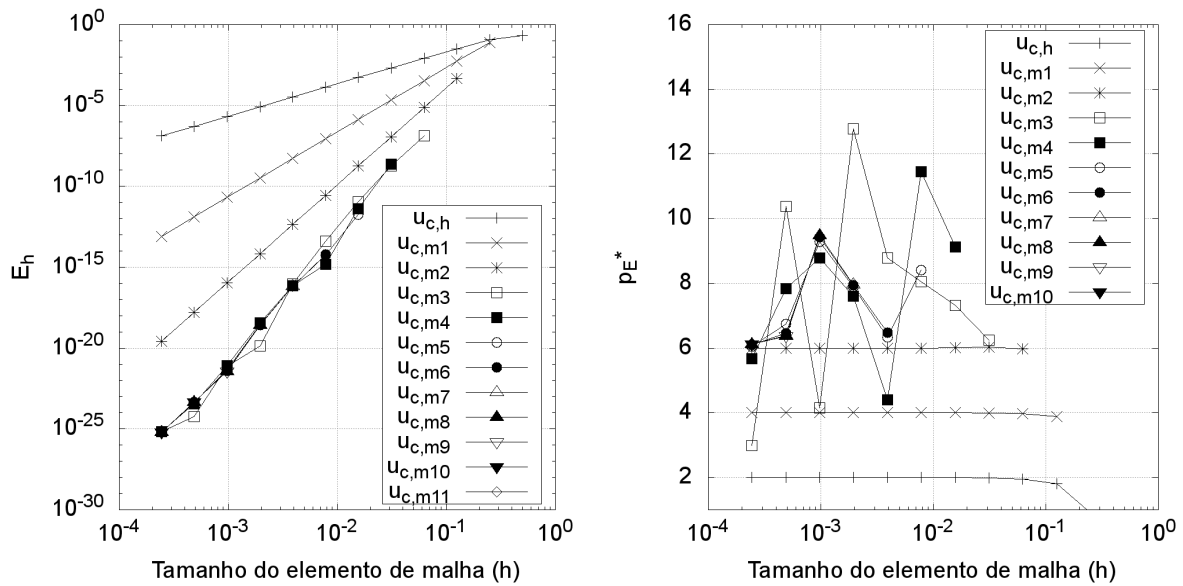
Figura A.6 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $v_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D DF.



## A.4 BURGERS 2D VF

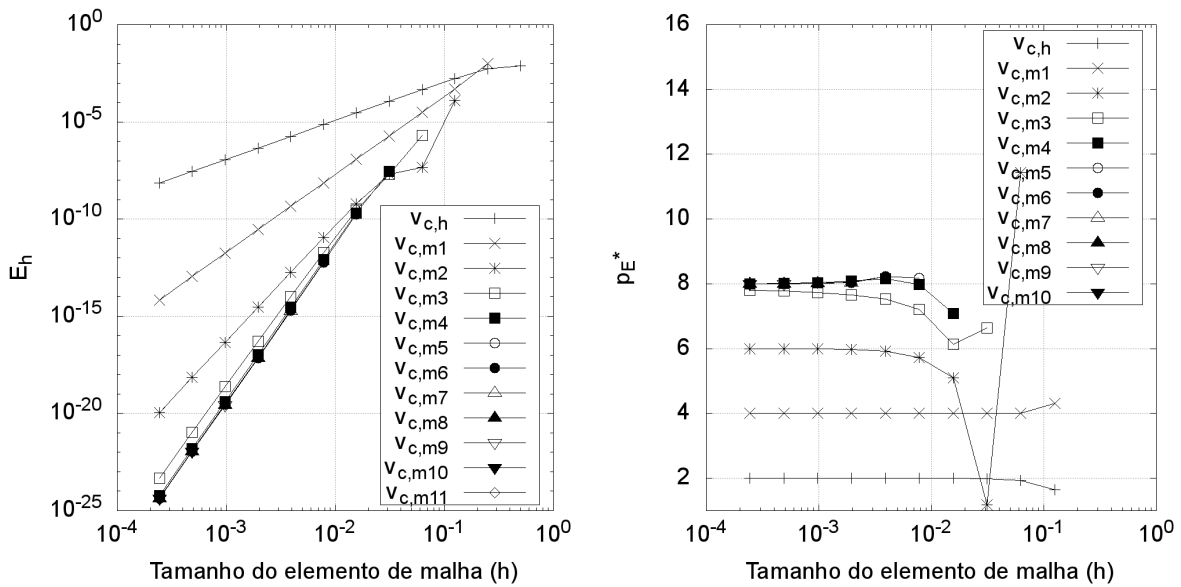
É apresentado na Fig. A.7 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $u_c$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.7 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $u_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D VF.



Na Fig. A.8 é apresentado o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $v_c$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

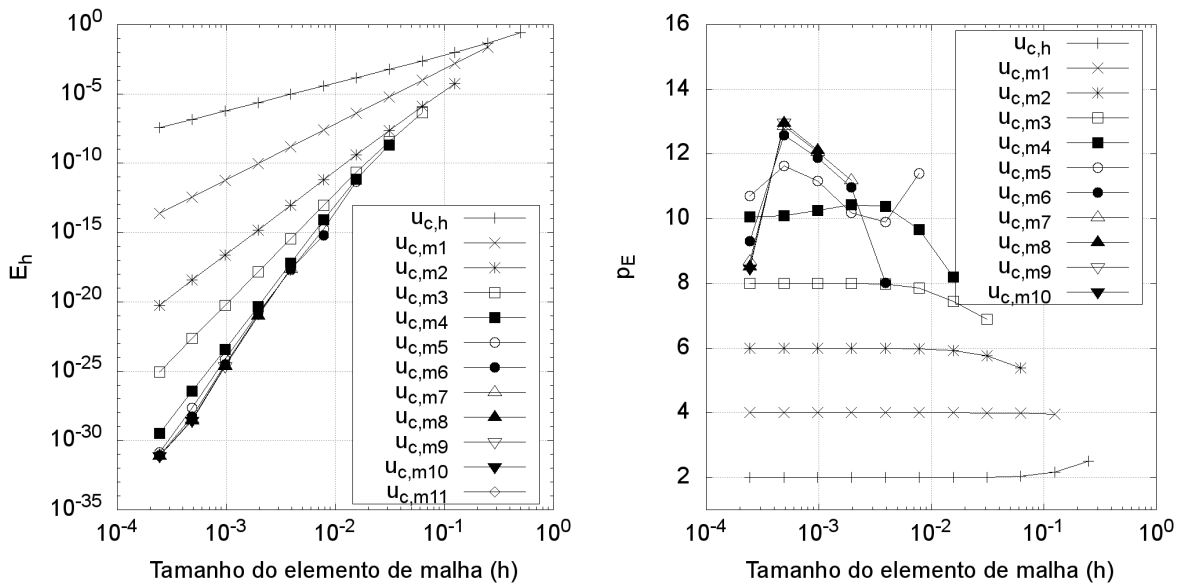
Figura A.8 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $v_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Burgers 2D VF.



## A.5 NAVIER-STOKES 2D DF

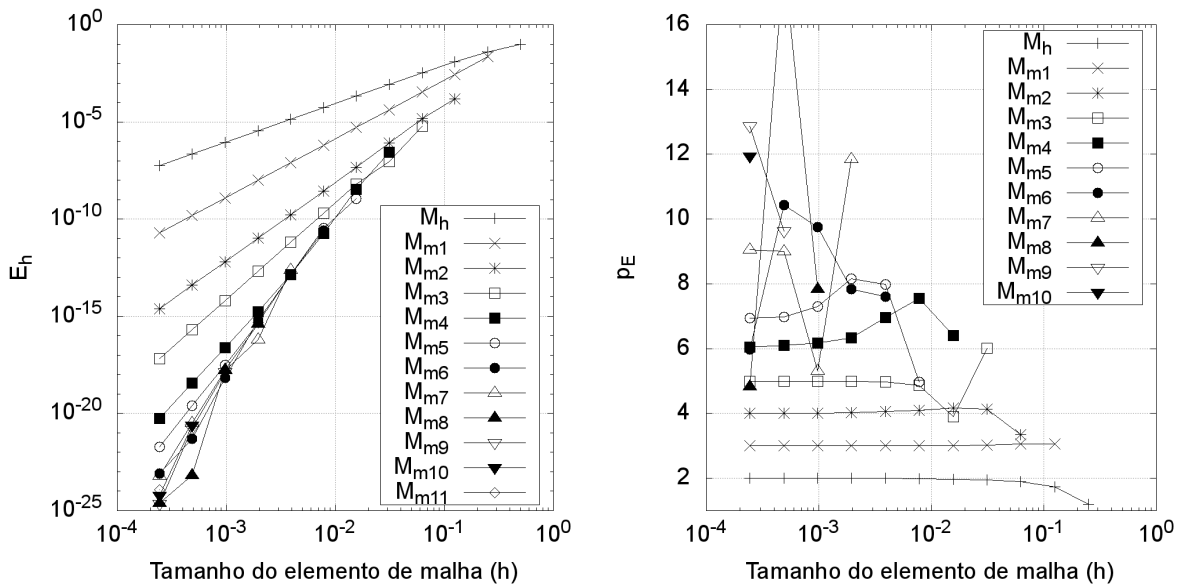
É apresentado na Fig. A.9 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $u_c$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.9 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $u_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF.



É apresentado na Fig. A.10 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $m$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

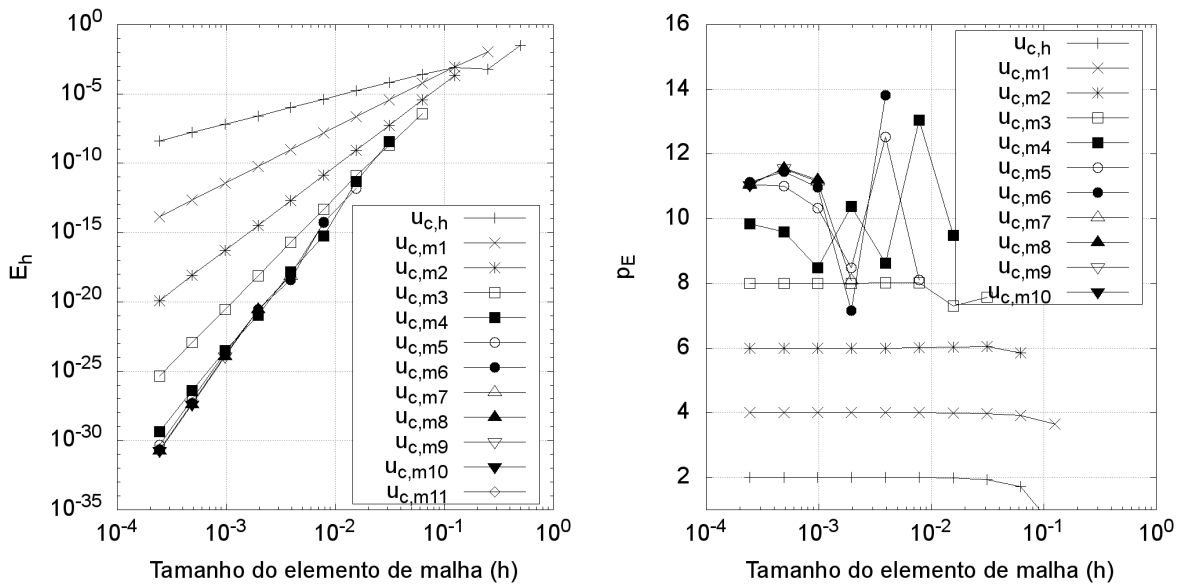
Figura A.10 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $\bar{m}$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D DF.



## A.6 NAVIER-STOKES 2D VF

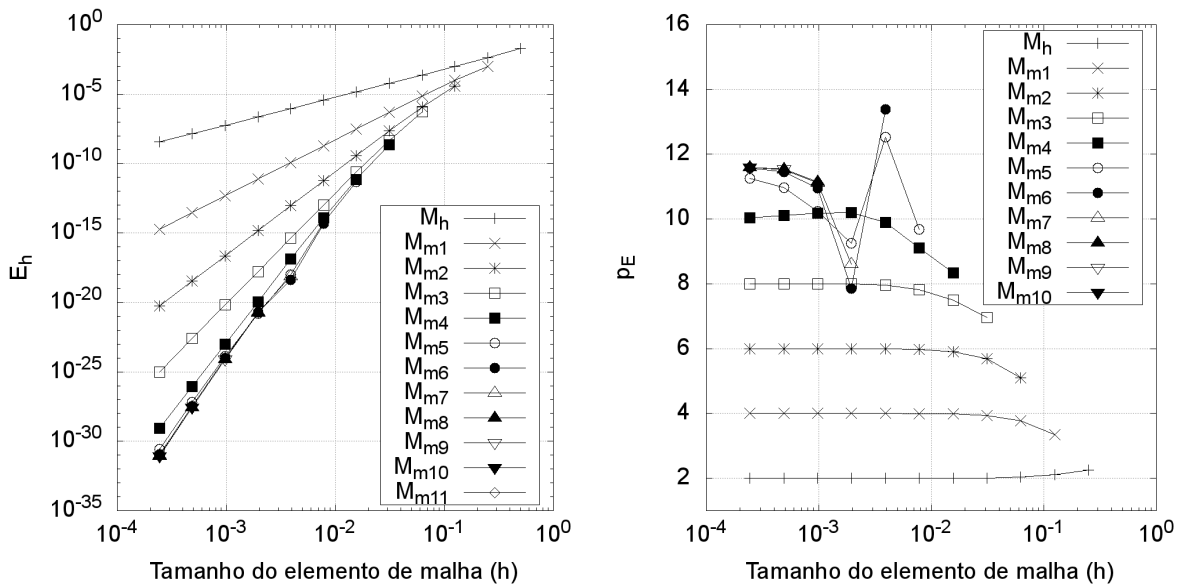
É apresentado na Fig. A.11 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $u_c$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.11 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $u_c$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF.



É apresentado na Fig. A.12 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $\bar{m}$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

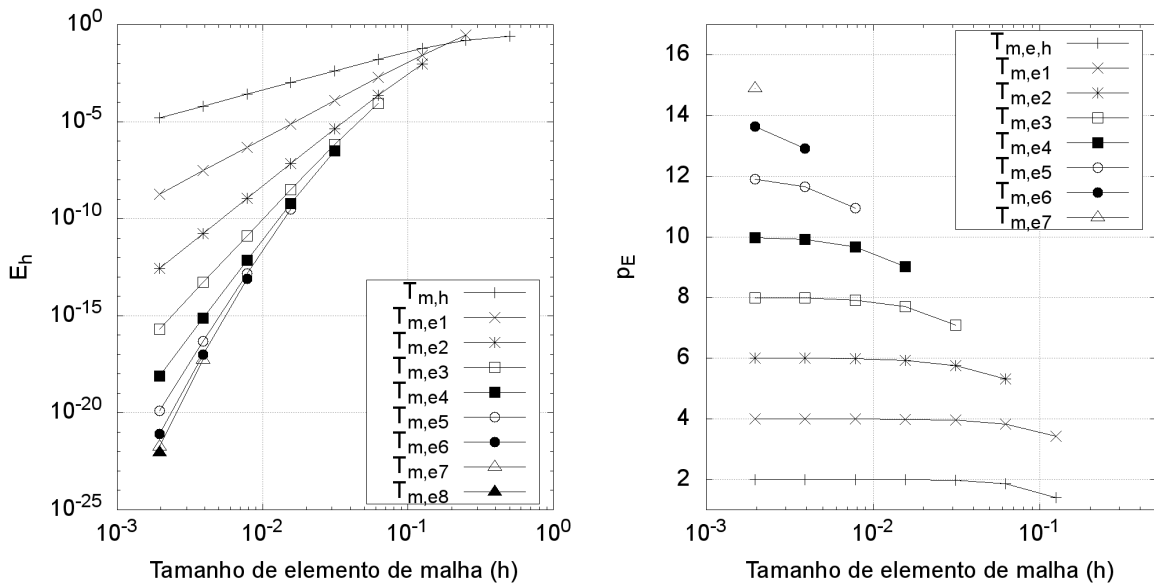
Figura A.12 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $m$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Navier-Stokes 2D VF.



## A.7 LAPLACE 3D DF

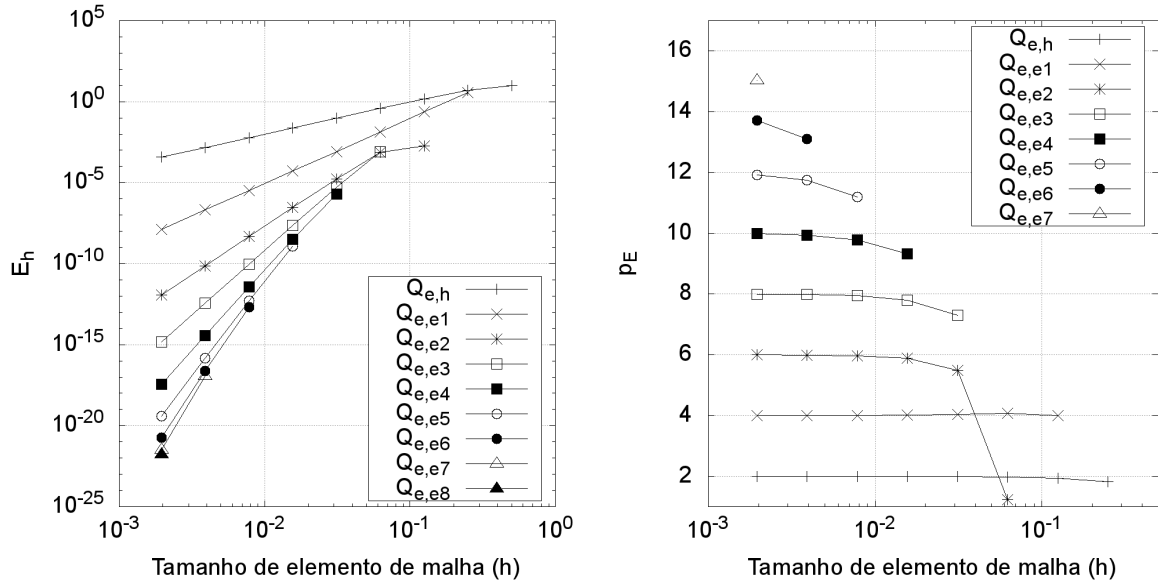
É apresentado na Fig. A.13 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.13 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D DF.



É apresentado na Fig. A.14 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

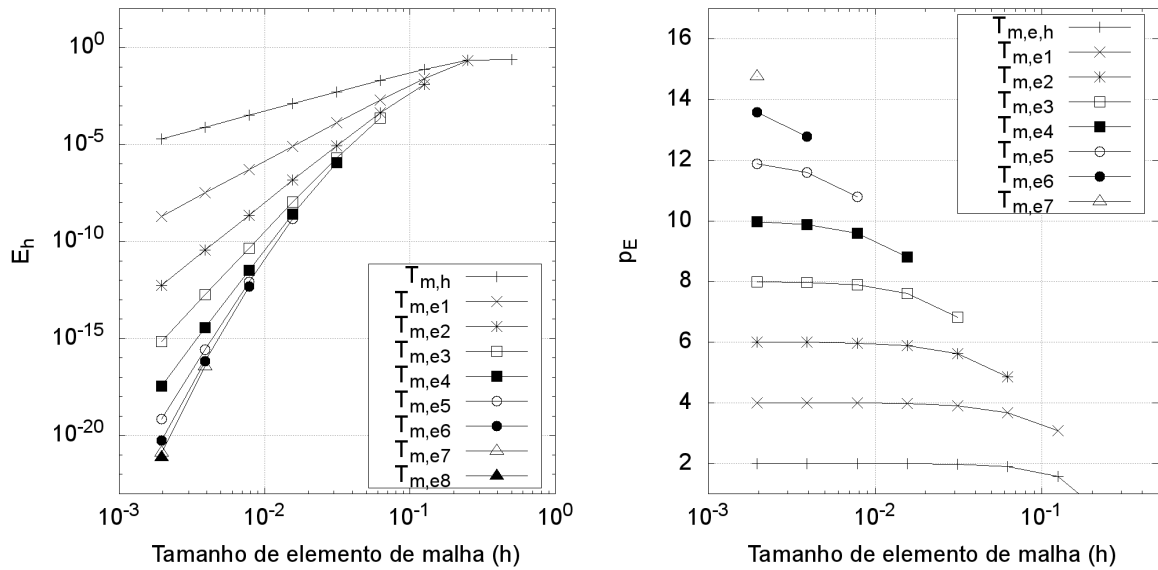
Figura A.14 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D DF.



## A.8 LAPLACE 3D VF

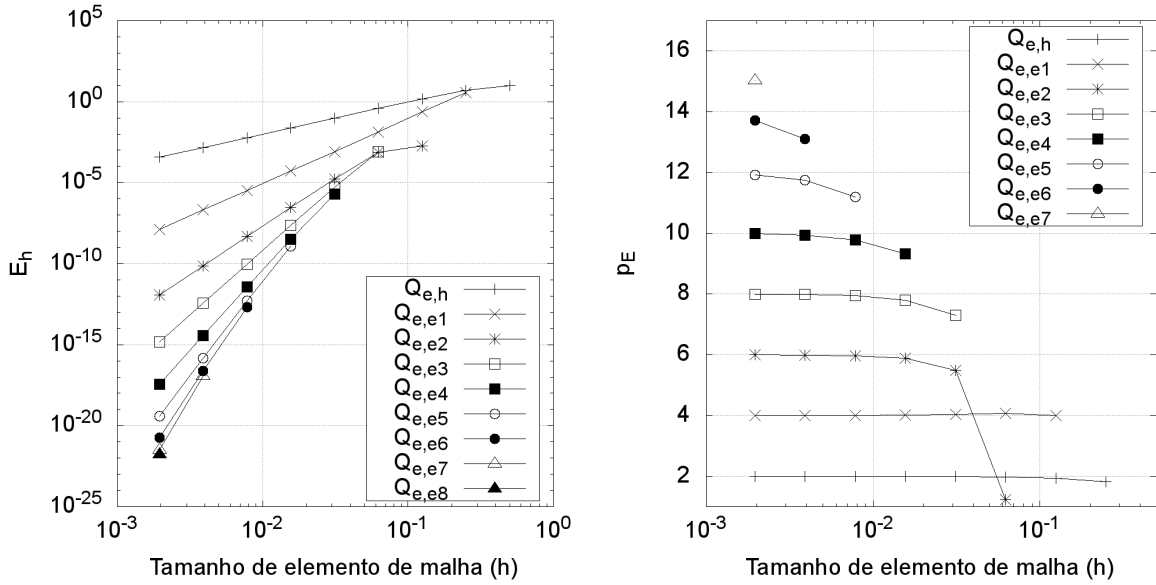
É apresentado na Fig. A.15 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.15 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D VF.



É apresentado na Fig. A.16 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

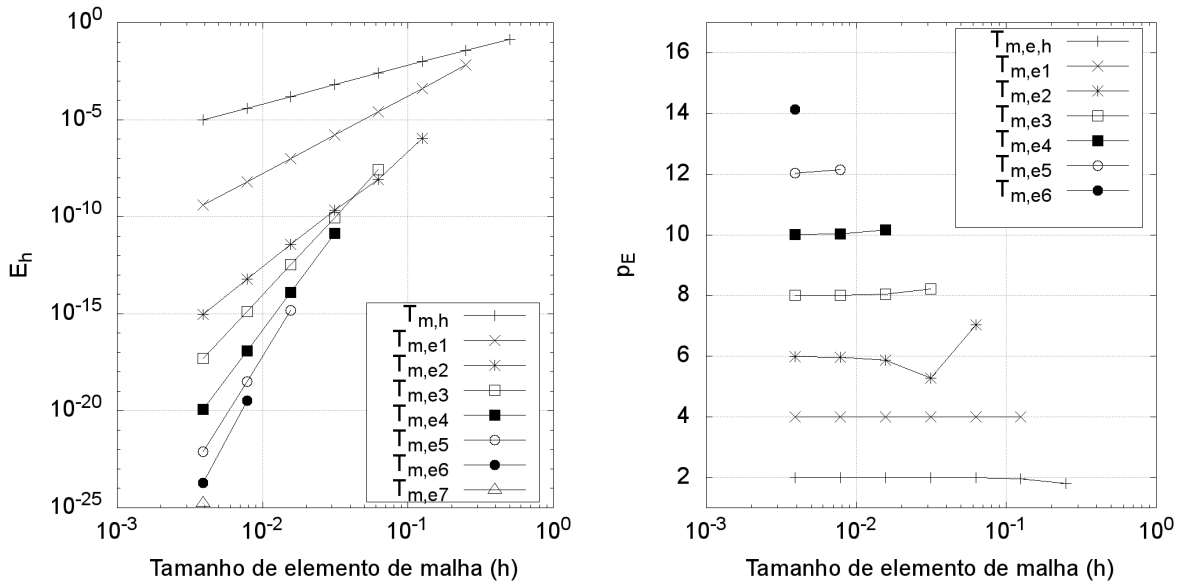
Figura A.16 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Laplace 3D VF.



## A.9 LAPLACE 3D DF

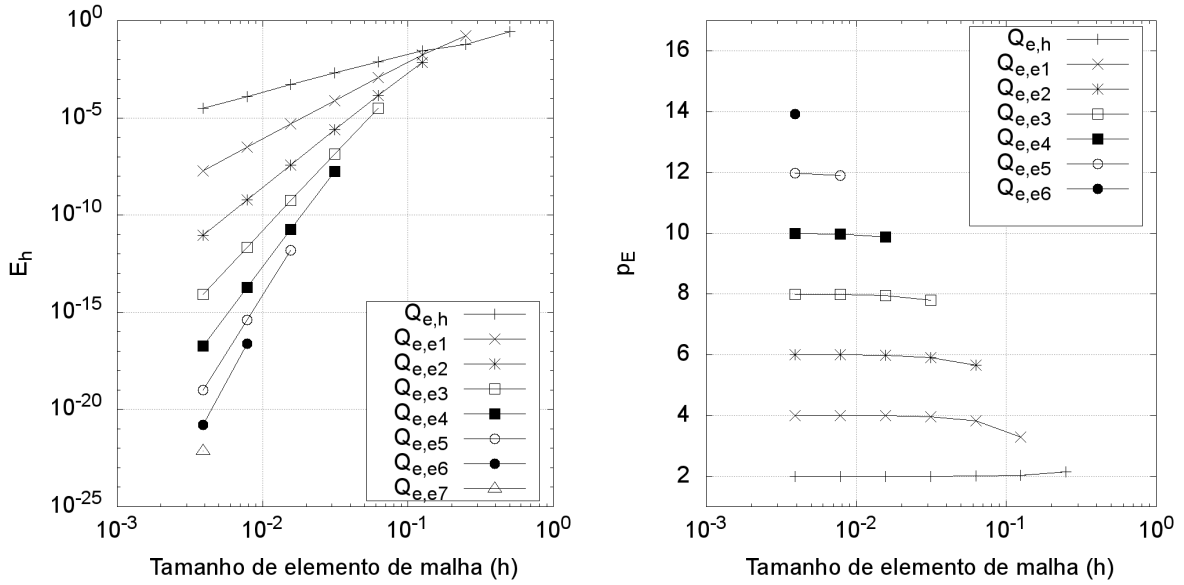
É apresentado na Fig. A.17 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.17 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D DF.



É apresentado na Fig. A.18 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

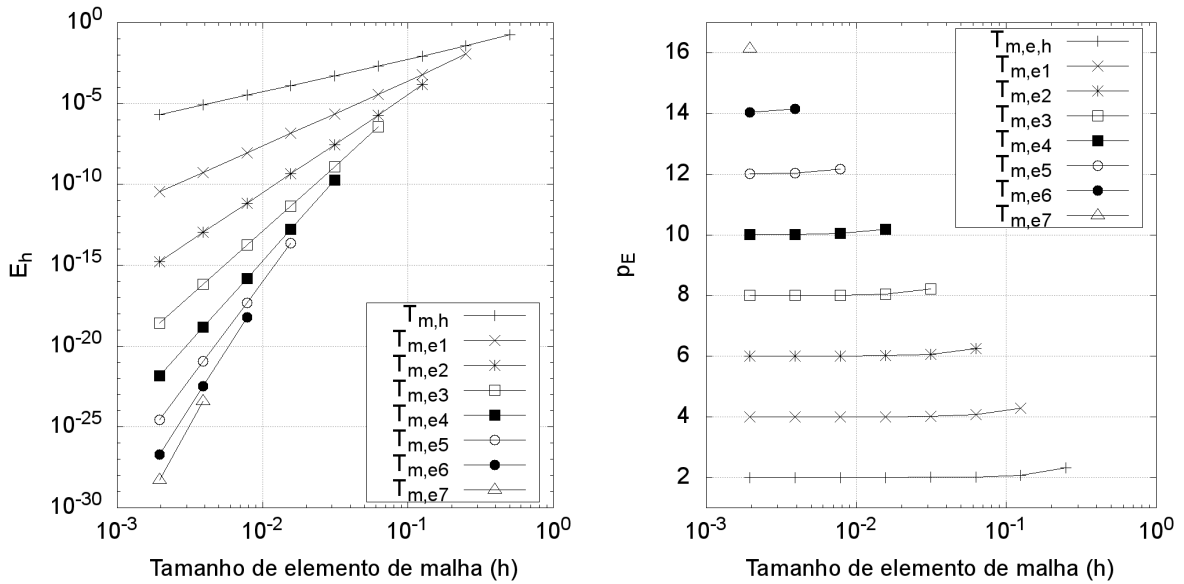
Figura A.18 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D DF.



## A.10 LAPLACE 3D VF

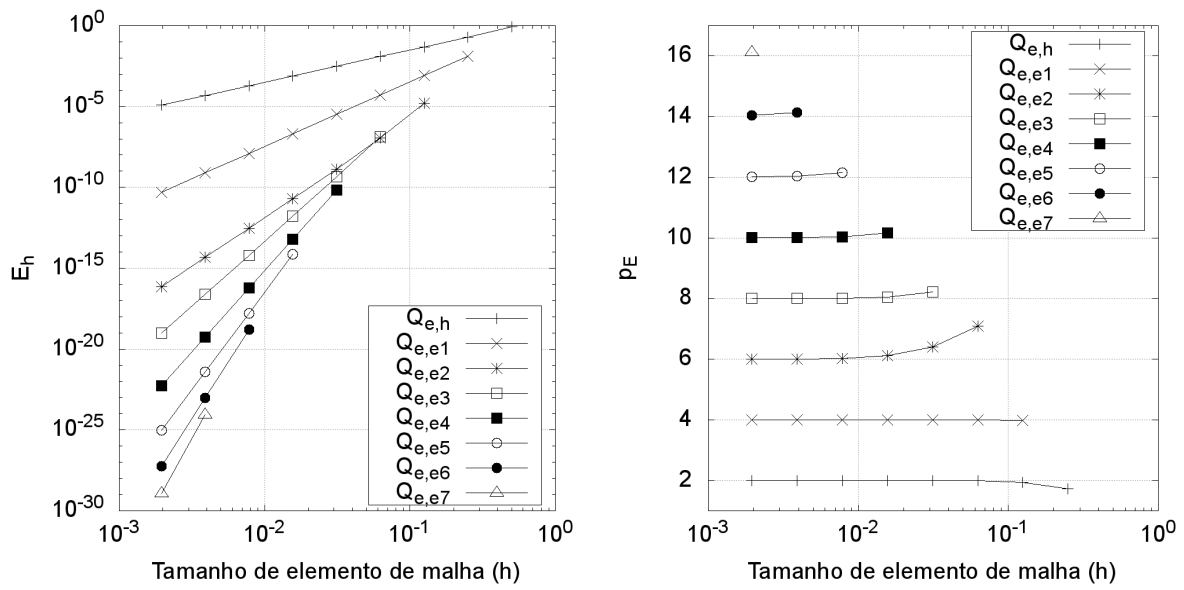
É apresentado na Fig. A.19 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.19 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $T_m$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D VF.



É apresentado na Fig. A.20 o comportamento do erro de discretização e a ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em função do tamanho de malha e os níveis de extrapolação utilizados.

Figura A.20 – Erro de discretização e ordem efetiva equivalente da variável  $Q_e$  em relação ao tamanho de malha para todos os níveis de extrapolação utilizados - Poisson 3D VF.





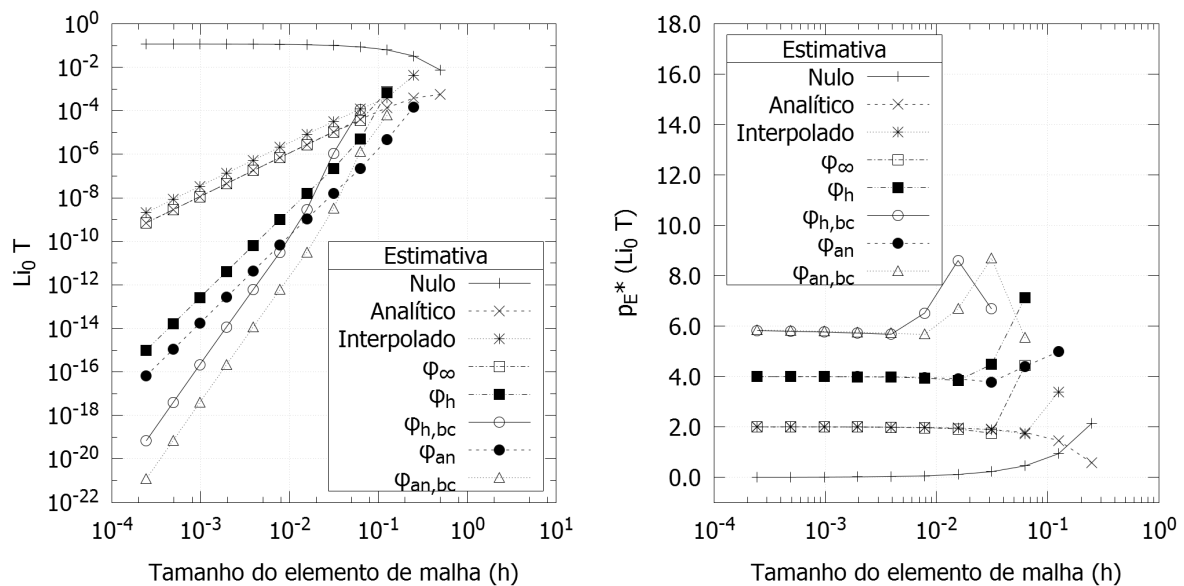
# APÊNDICE B – ERROS DE ITERAÇÃO

Neste apêndice são apresentados os gráficos complementares referentes aos erros de iteração.

## B.1 ADVECÇÃO-DIFUSÃO MODIFICADO 2D DF

A Fig. B.1 mostra  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada.

Figura B.1 – Comparação de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão Modificado 2D DF.



A análise das Fig. B.1 são similares a da seção 4.1.2. O comportamento das estimativas iniciais sem solução analítica (subíndice h) e com solução analítica (subíndice an) estão presentes na Fig. B.2 e as ordens efetivas estão na Fig. B.3, respectivamente.

Nota-se no entanto na Fig. B.3 que a máxima ordem efetiva obtida é de 6, ou seja, não há ganho algum em utilizar estimativas iniciais que considerem mais termos no erro de discretização a partir de  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$ ; de fato, o valor da norma  $L_1$  do erro de iteração na estimativa inicial pode ser maior se os demais métodos forem utilizados como mostra a Fig. B.2.

Figura B.2 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  - Advecção-Difusão Modificado 2D DF.

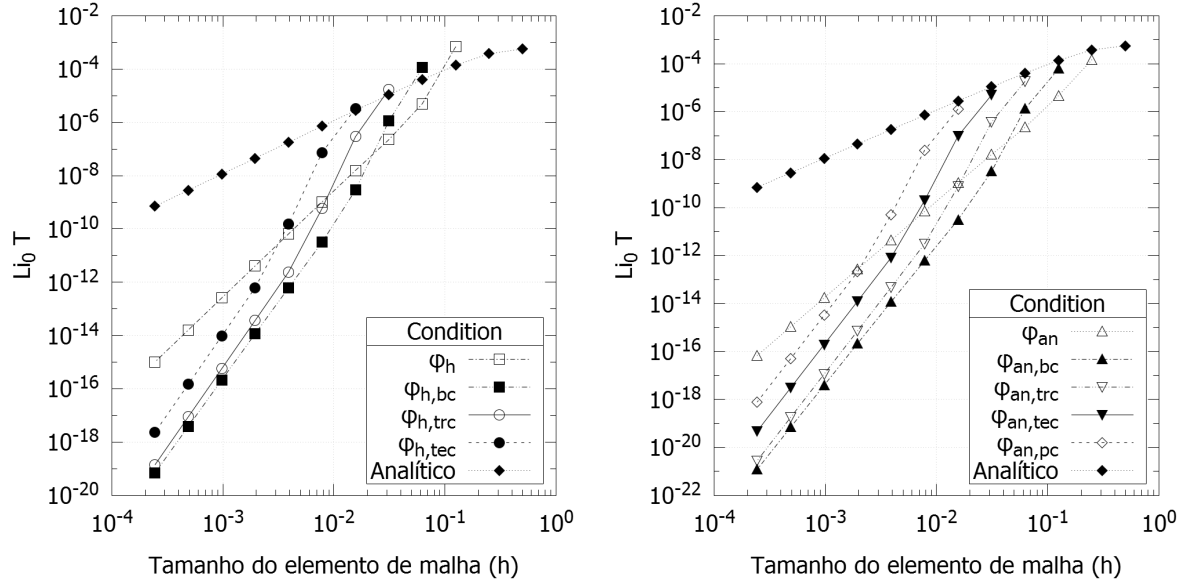
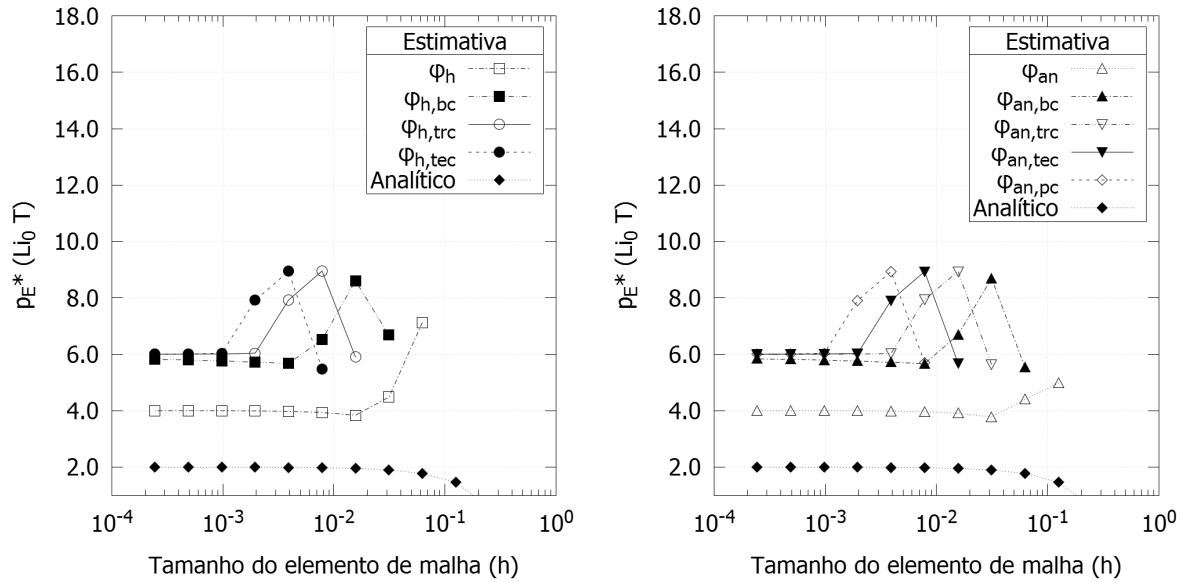


Figura B.3 – Ordem efetiva de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  (esquerda) e  $\phi_{an}$  (direita) - Advecção-Difusão Modificado 2D DF.

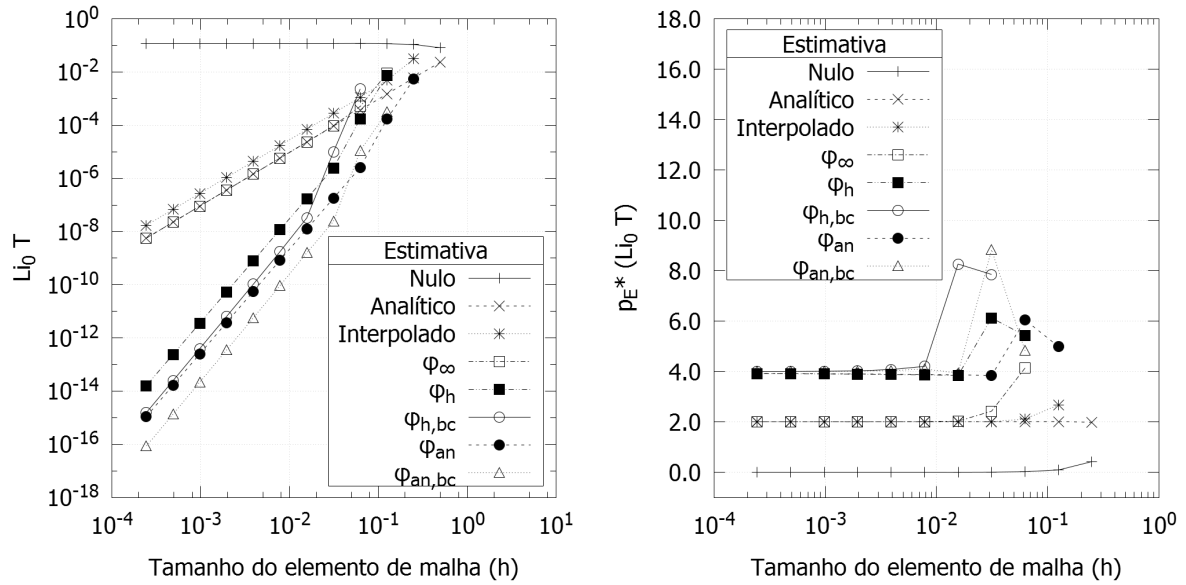


## B.2 ADVECÇÃO-DIFUSÃO MODIFICADO 2D VF

A Fig. B.4 mostra  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada.

Novamente como apresentado na Fig. 4.19 o máximo de ordem efetiva obtido foi 4. Desta forma, não há ganho algum em utilizar estimativas iniciais que considerem mais termos no erro de discretização a partir de  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$ , exceto pelo menor valor apresentado

Figura B.4 – Comparação de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Advecção-Difusão Modificado 2D VF.



da norma  $L_1$  do erro de iteração na estimativa inicial.

### B.3 BURGERS 2D DF

A Fig. B.5 mostra  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada e a Fig. B.6 mostra a ordem efetiva nas mesmas condições. A ordem de acurácia aqui significa a taxa de redução do erro de iteração verdadeiro da estimativa inicial em função do tamanho de malha utilizado. Notando que os pontos não coincidentes entre as malhas consecutivas foram interpolados com no máximo  $15^\circ$  grau, onde não havia pontos suficientes a interpolação utilizada foi a máxima permitida pelos pontos disponíveis.

A análise das Figs. B.5 e B.6 são similares a da seção 4.1.2. O comportamento das estimativas iniciais sem solução analítica e com solução analítica estão presentes nas Figs. B.9 e B.10, respectivamente.

Nota-se no entanto que a máxima ordem efetiva obtida é de 6 na Fig. B.10, ou seja, não há ganho algum em utilizar estimativas iniciais que considerem mais termos no erro de discretização a partir de  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$ , exceto pela redução da norma  $L_1$  do erro de iteração na estimativa inicial.

### B.4 BURGERS 2D VF

A Fig. B.11 mostra  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada e a Fig. B.12 mostra a ordem efetiva nas mesmas condições.

Figura B.5 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D DF.

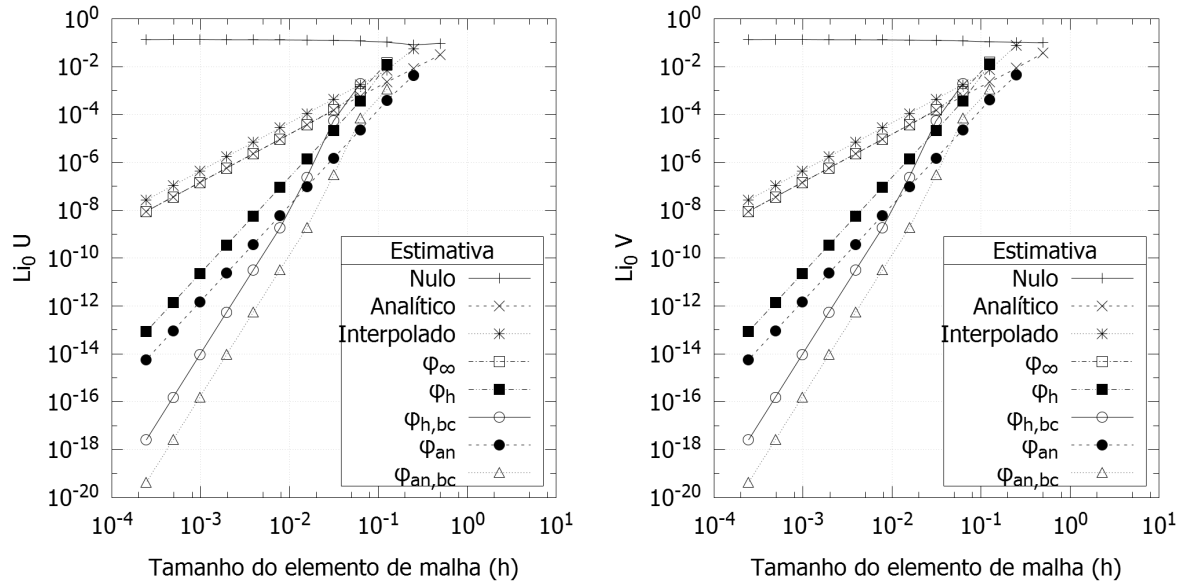
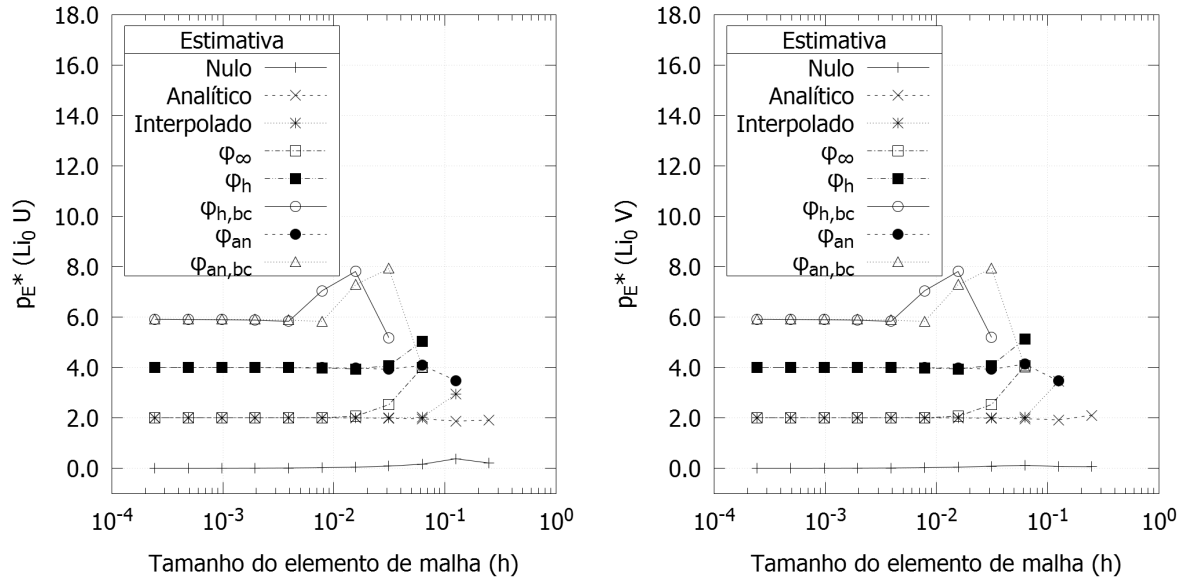


Figura B.6 – Ordem efetiva de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D DF.



A análise das Figs. B.5 e B.6 são similares a da seção 4.1.2.

Nota-se que a máxima ordem efetiva obtida é de 4 para  $U$  e 6 para  $V$ , ou seja, não há ganho algum em utilizar estimativas iniciais que considerem mais termos no erro de discretização a partir de  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  para  $U$  e  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$  para  $V$ , exceto pela redução da norma  $L_1$  do erro de iteração na estimativa inicial.

Figura B.7 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização no método  $\phi_h$  - Burgers 2D DF.

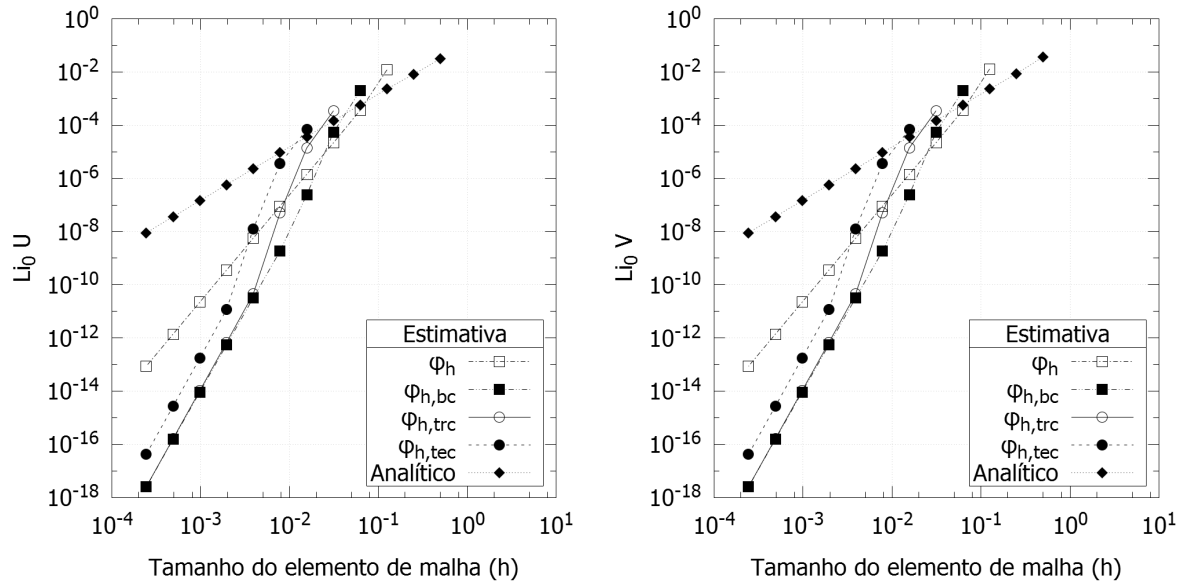
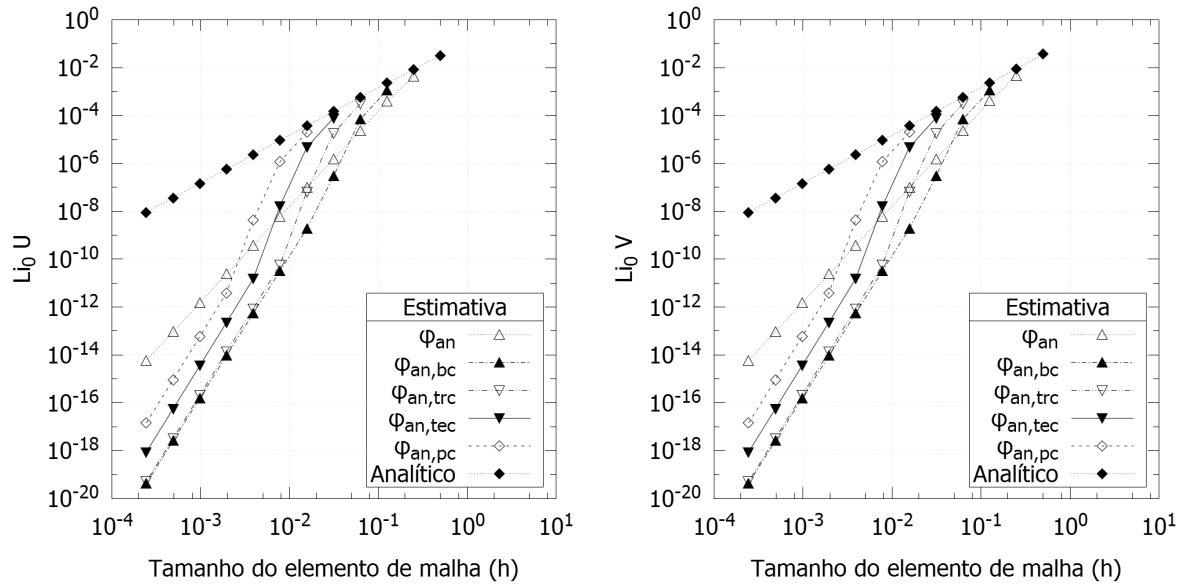


Figura B.8 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização no método  $\phi_{an}$  - Burgers 2D DF.



## B.5 NAVIER-STOKES 2D DF

A Fig. B.13 mostra  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada e a Fig. B.14 mostra a ordem efetiva nas mesmas condições. A ordem de acurácia aqui significa a taxa de redução do erro de iteração verdadeiro da estimativa inicial em função do tamanho de malha utilizado. Notando que os pontos não coincidentes entre as malhas consecutivas foram interpolados com no máximo 15º grau, onde não havia pontos suficientes a interpolação utilizada foi a máxima permitida pelos pontos disponíveis.

Figura B.9 – Ordem efetiva de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  (esquerda) e  $\phi_{an}$  (direita) - Burgers 2D DF.

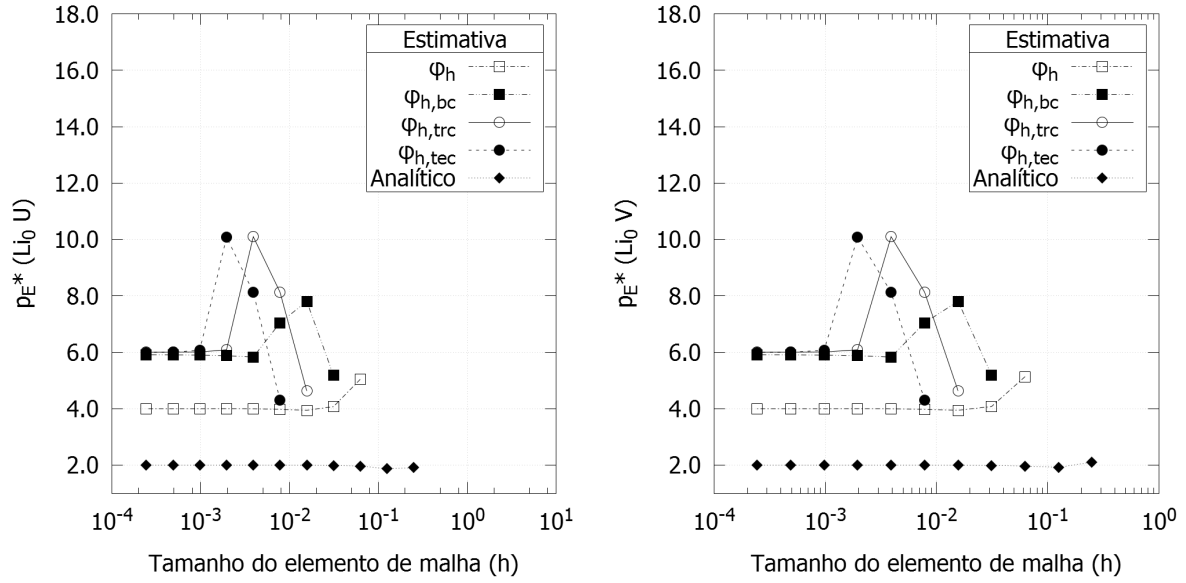
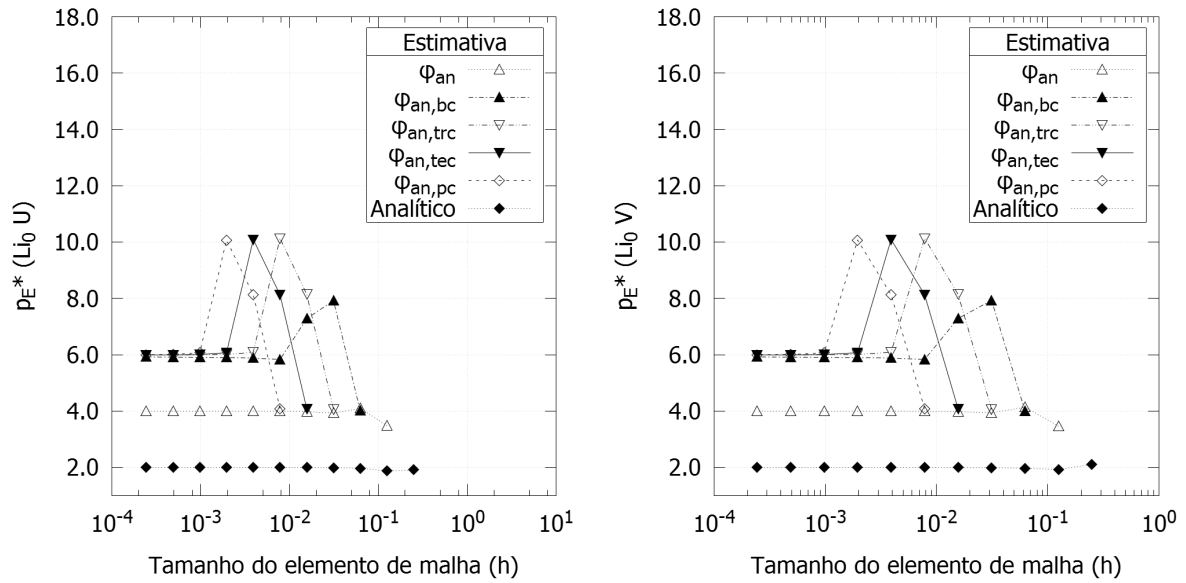


Figura B.10 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização no método  $\phi_{an}$  - Burgers 2D DF.



A análise das Figs. B.13 e B.14 são similares a da seção 4.1.2. O comportamento das estimativas iniciais sem solução analítica e com solução analítica estão presentes nas Figs. B.15 e B.16, respectivamente.

Nota-se no entanto que a máxima ordem efetiva obtida é de 6, ou seja, não há ganho algum em utilizar estimativas iniciais que considerem mais termos no erro de discretização a partir de  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$ .

Figura B.11 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D VF.

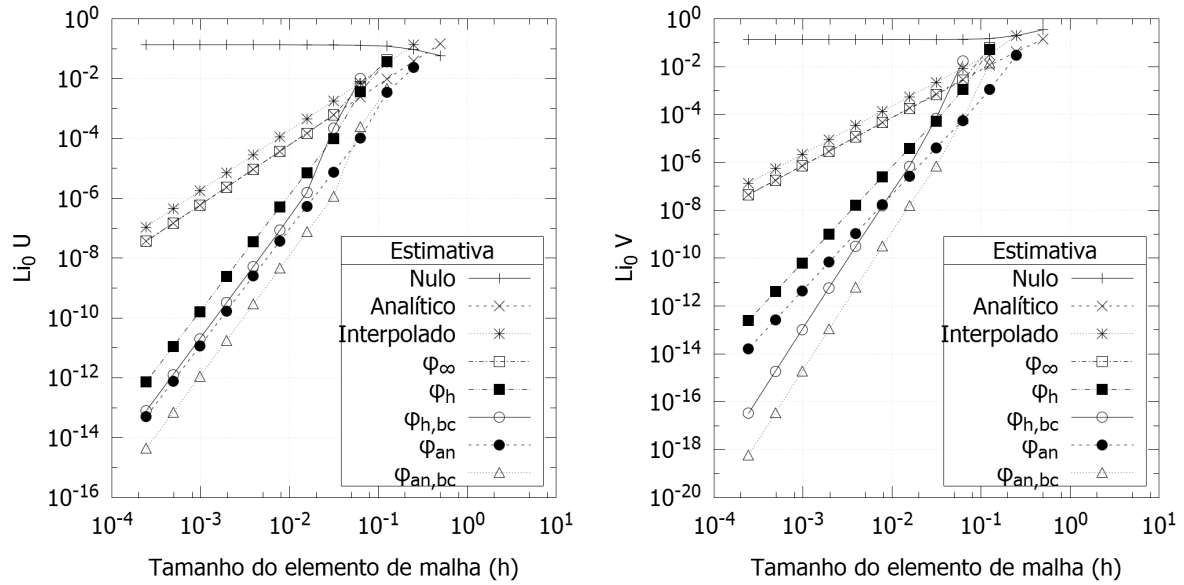
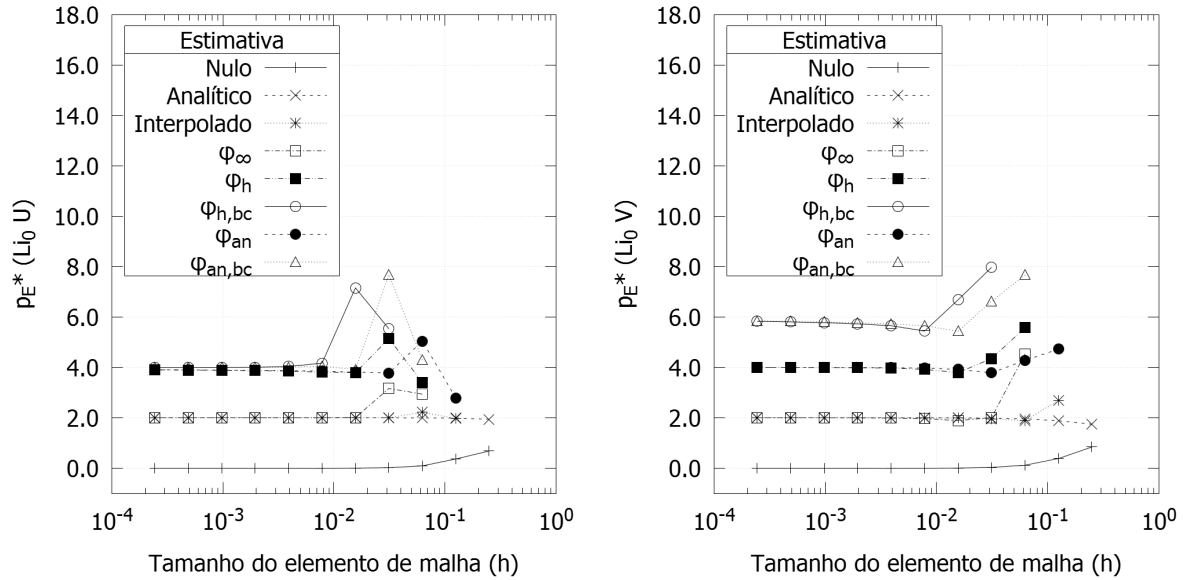


Figura B.12 – Ordem efetiva de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Burgers 2D VF.



## B.6 NAVIER-STOKES 2D VF

A Fig. B.17 mostra  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada e a Fig. B.18 mostra a ordem efetiva nas mesmas condições.

A análise das Figs. B.13 e B.14 são similares a da seção 4.1.2.

Nota-se que a máxima ordem efetiva obtida é de 6.

Figura B.13 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Navier Stokes 2D.

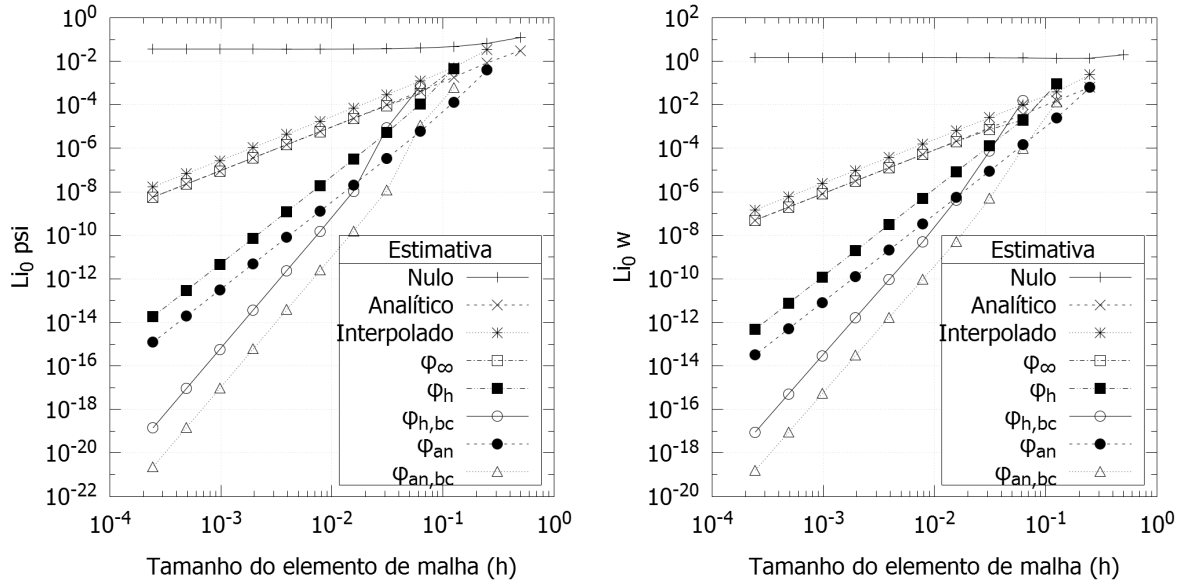
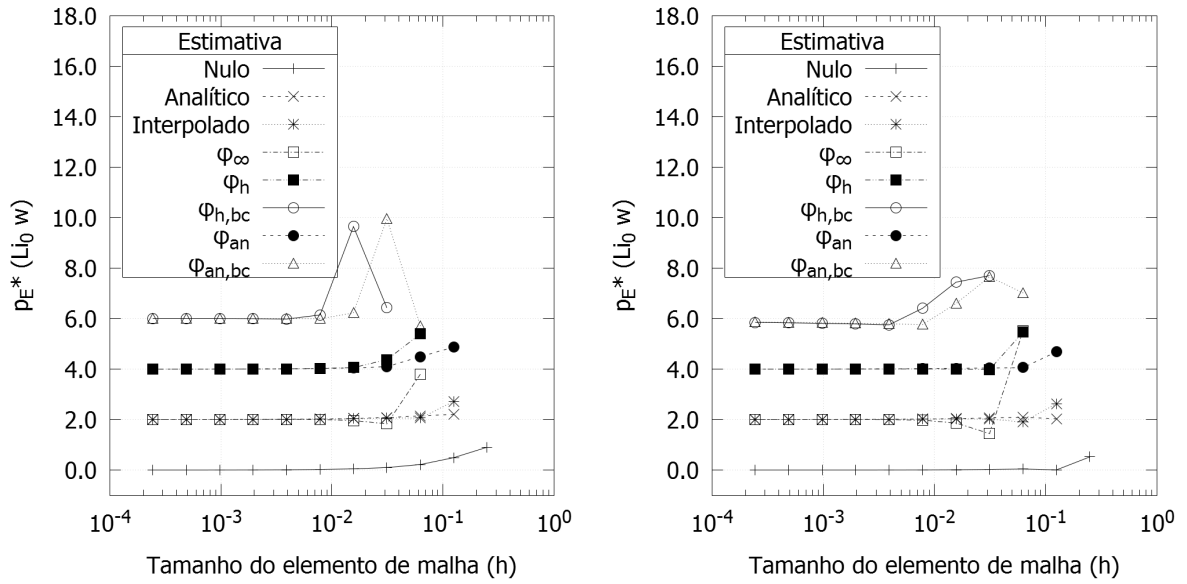


Figura B.14 – Ordem efetiva de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Navier Stokes 2D.



## B.7 LAPLACE 3D DF

A Fig. B.19 mostra  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada.

A análise da Fig. B.19 é similar a da seção 4.1.2. O comportamento das estimativas iniciais sem solução analítica (subíndice h) e com solução analítica (subíndice an) estão presentes na Fig. B.20 e as ordens efetivas estão na Fig. B.21, respectivamente.

Notando que foi obtido ordem 6 nas metodologias  $\phi_{h,bc}$  e  $\phi_{an,bc}$  como mostra a Fig.



Figura B.15 – Ordem efetiva de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  (esquerda) - Navier Stokes 2D DF.

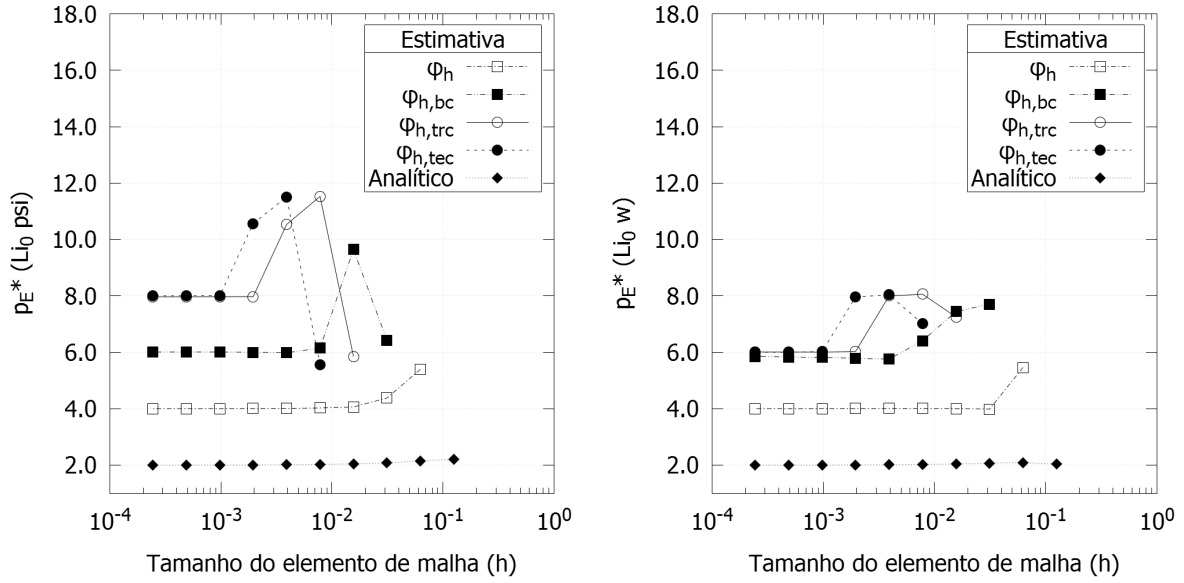
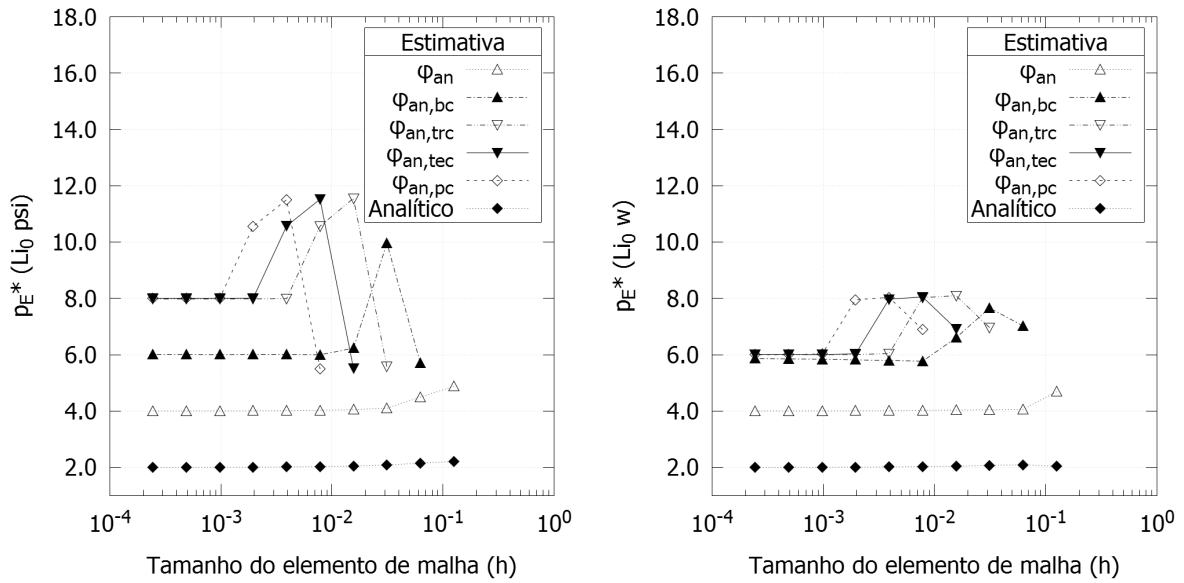


Figura B.16 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização no método  $\phi_{an}$  - Navier Stokes 2D DF.



B.21. O menor erro é de  $Li_0$  é obtido na malha mais fina utilizada  $257^3$  nas metodologias  $\phi_{h,trc}$  e  $\phi_{an,tec}$  como mostra a Fig. B.20.

## B.8 LAPLACE 3D VF

A Fig. B.22 mostra  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada.

Figura B.17 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Navier-Stokes 2D VF.

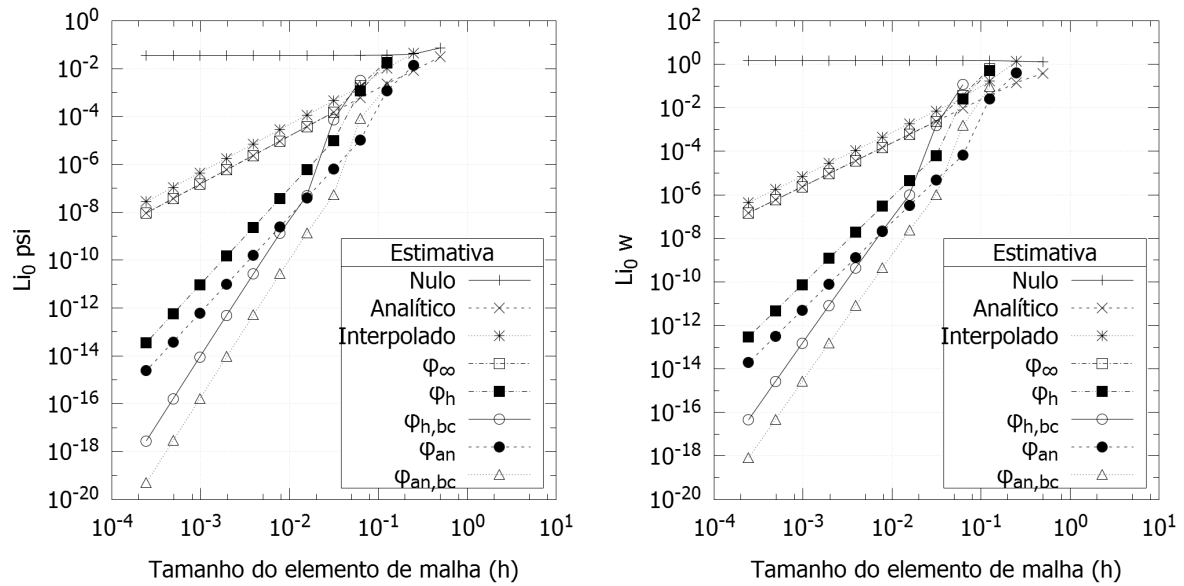
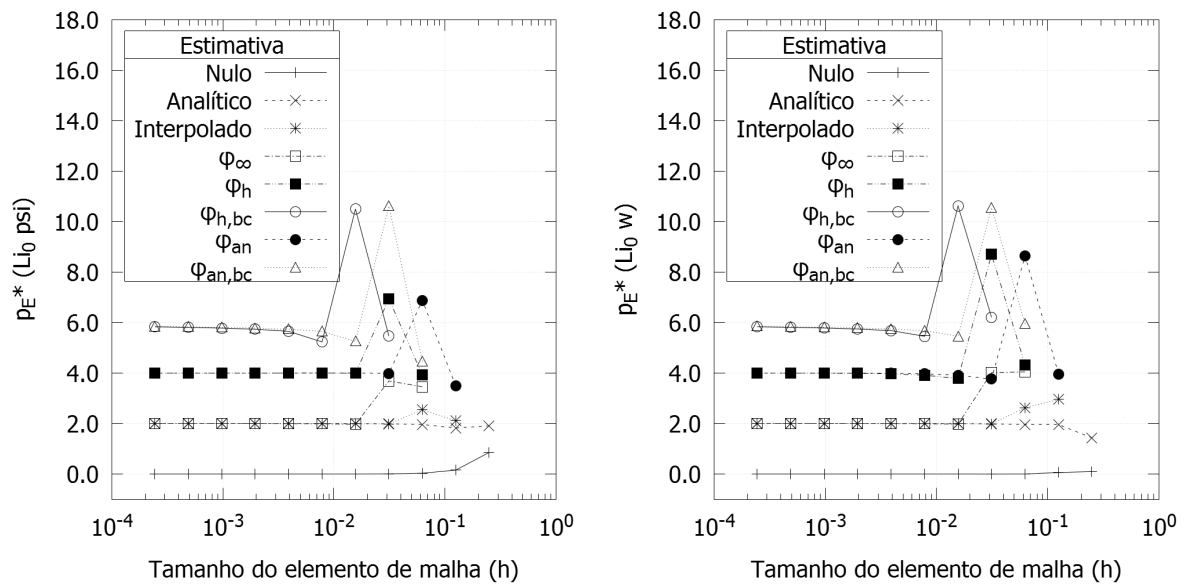


Figura B.18 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Navier-Stokes 2D VF.



A análise da Fig. B.22 é similar a da seção 4.1.2.

## B.9 POISSON 3D DF

A Fig. B.23 mostra  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada.

A análise da Fig. B.23 é similar a da seção 4.1.2. O comportamento das estimativas iniciais sem solução analítica (subíndice h) e com solução analítica (subíndice an) estão

Figura B.19 – Comparação de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Laplace 3D DF.

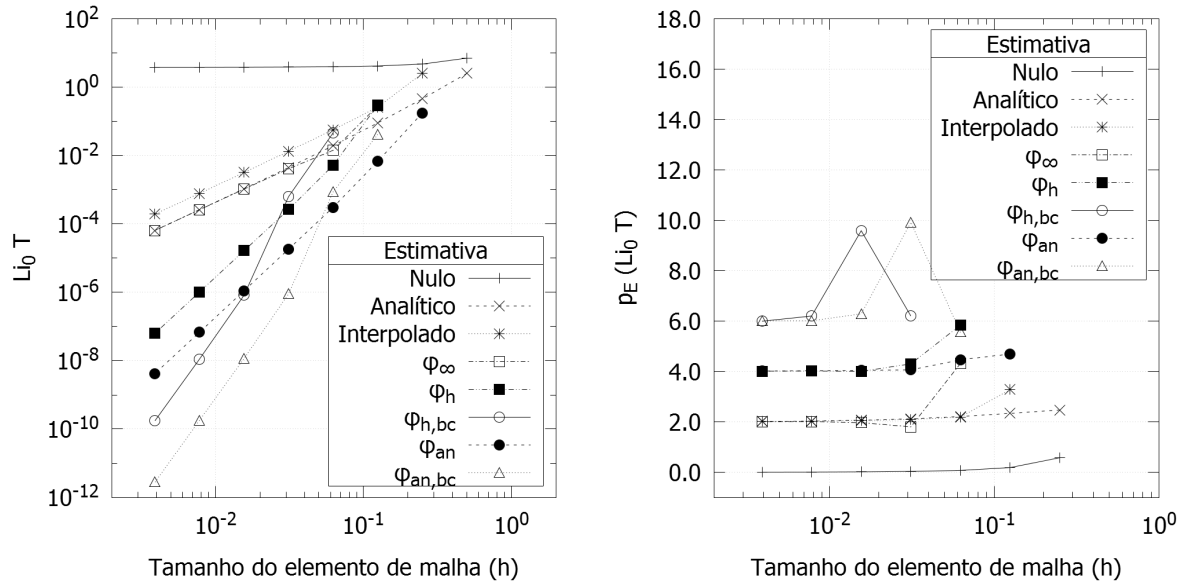
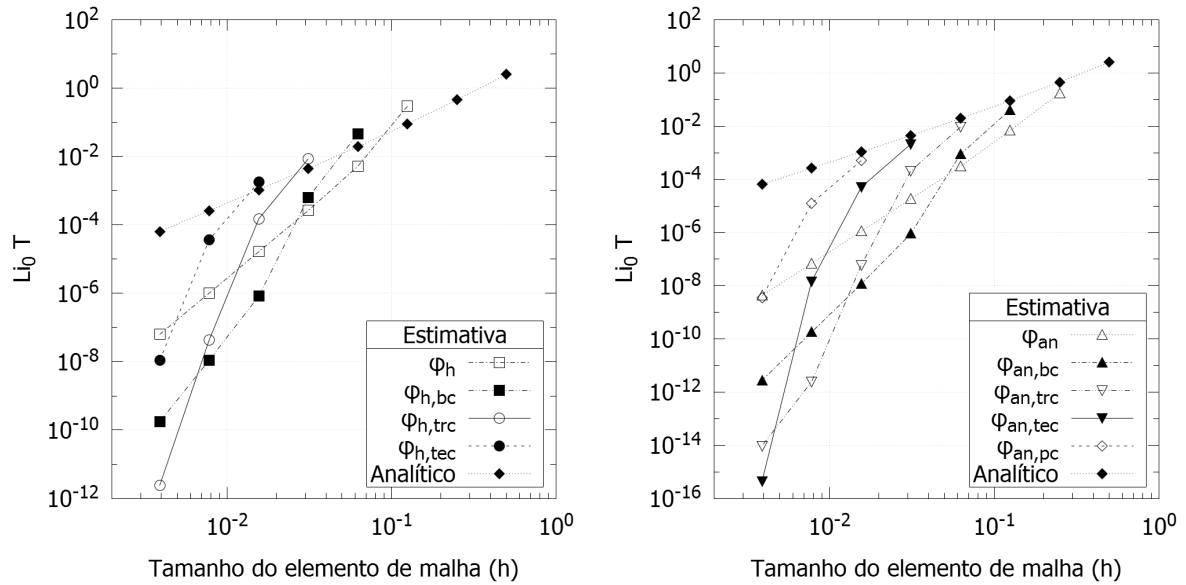


Figura B.20 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  - Laplace 3D DF.



presentes na Fig. B.24 e as ordens efetivas estão na Fig. B.25, respectivamente.

## B.10 POISSON 3D VF

A Fig. B.26 mostra  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha ao variar a estimativa inicial aplicada.

A análise da Fig. B.26 é similar a da seção 4.1.2.

Figura B.21 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  - Laplace 3D DF.

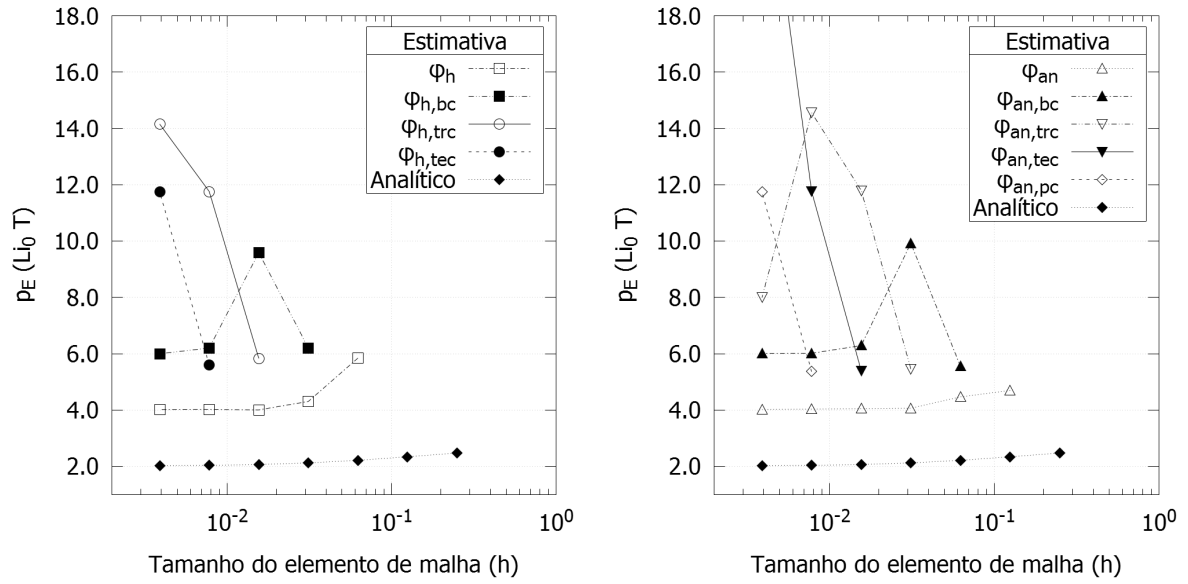


Figura B.22 – Comparação de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Laplace 3D VF.

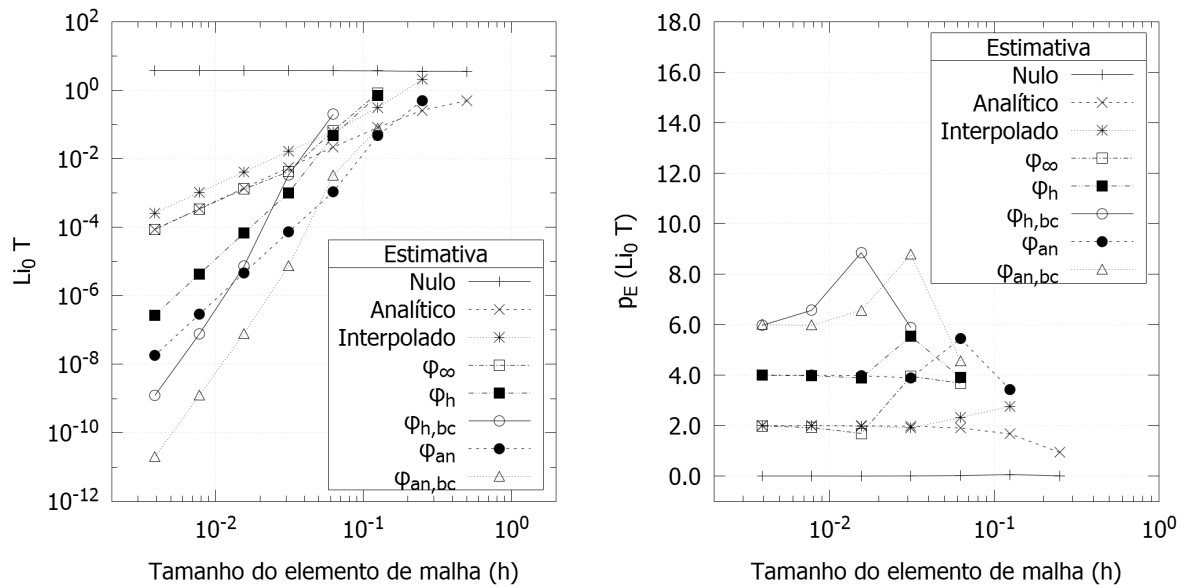


Figura B.23 – Comparação de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Poisson 3D DF.

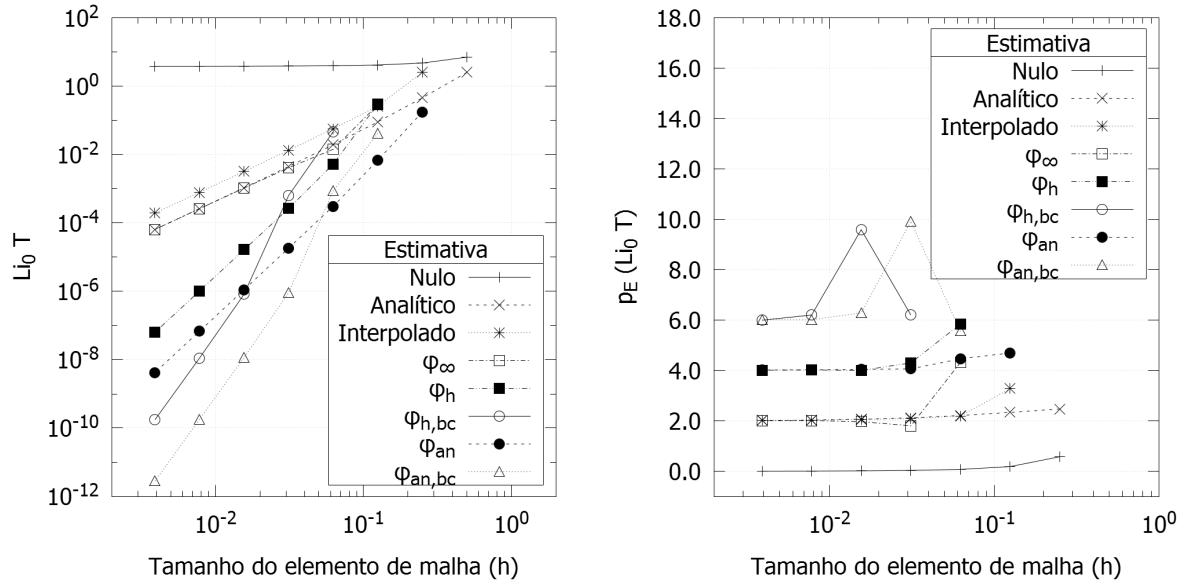


Figura B.24 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  - Poisson 3D DF.

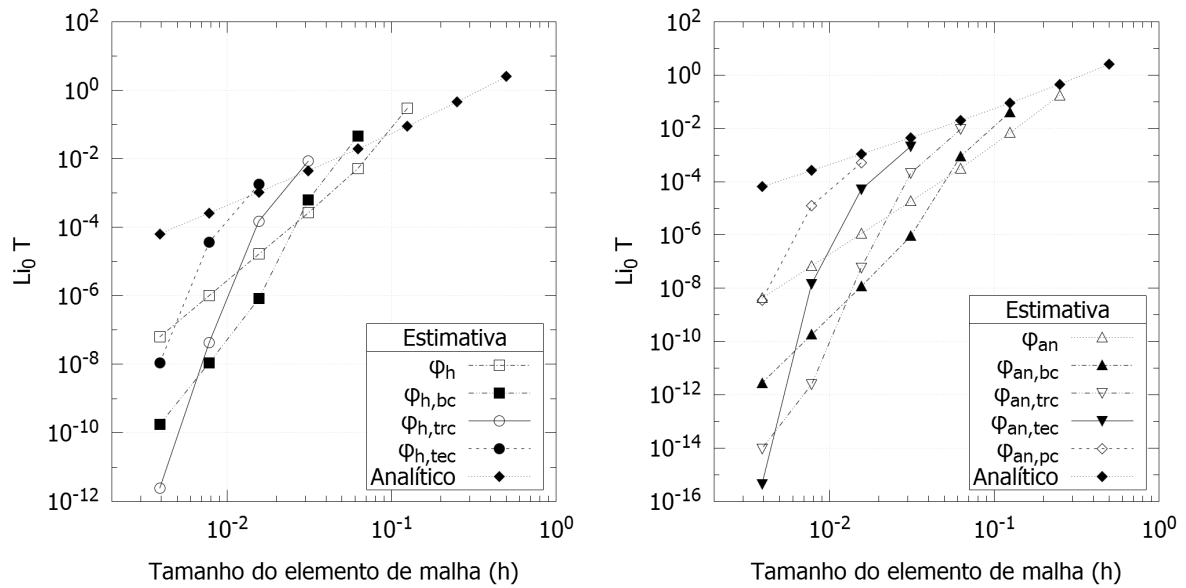


Figura B.25 – Comparação de  $Li_0$  em função do tamanho do elemento de malha para diferentes números de termos no erro de discretização nos métodos  $\phi_h$  e  $\phi_{an}$  - Poisson 3D DF.

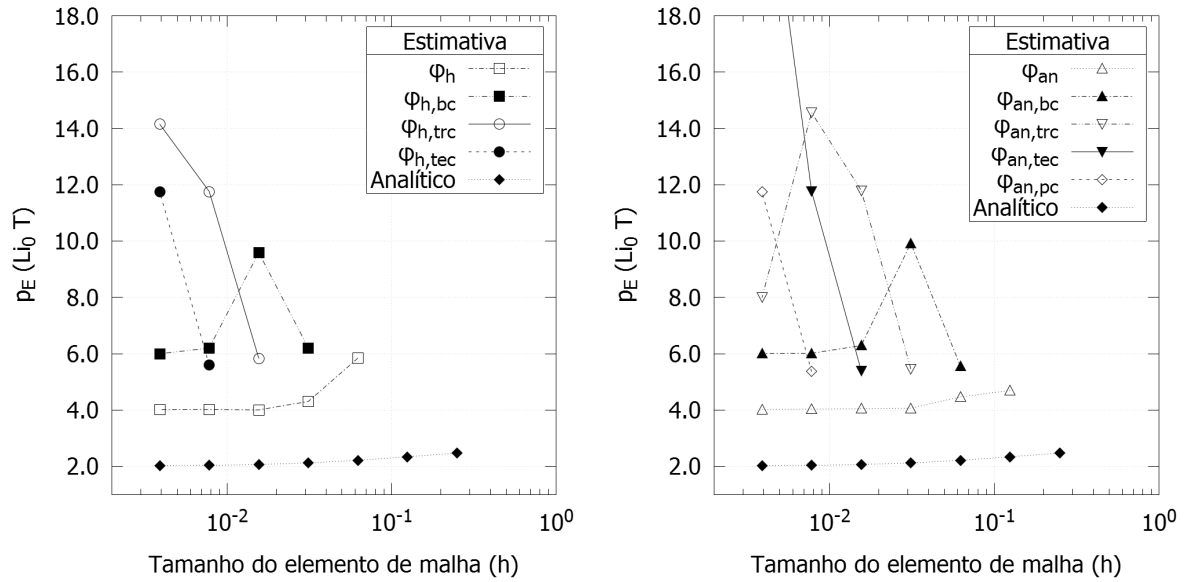
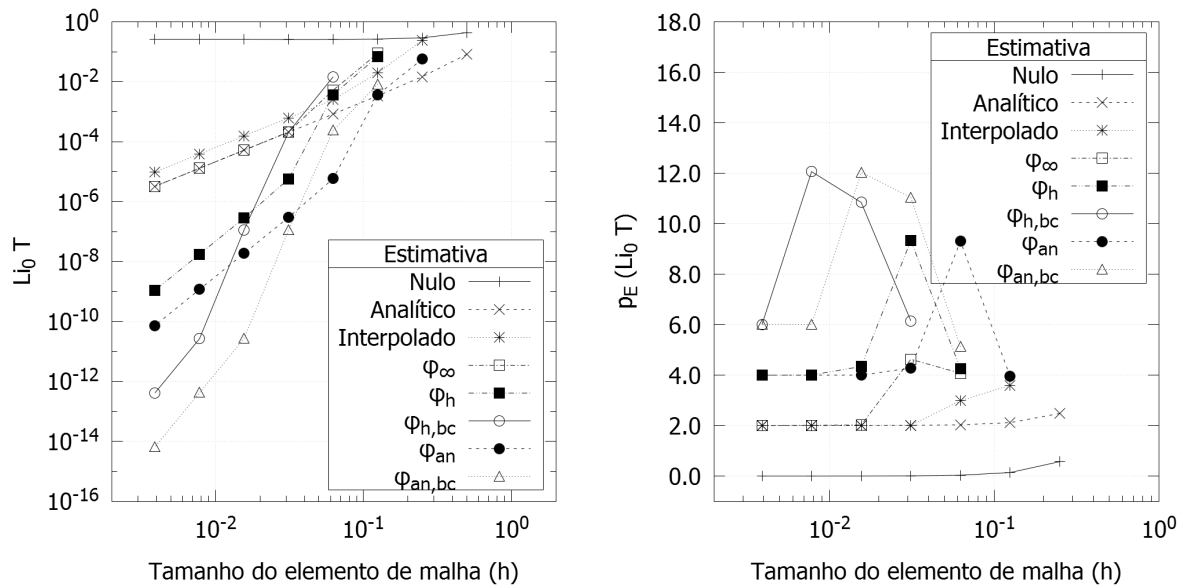


Figura B.26 – Comparação de  $Li_0$  e sua ordem efetiva em função do tamanho do elemento de malha para diferentes estimativas iniciais - Poisson 3D VF.

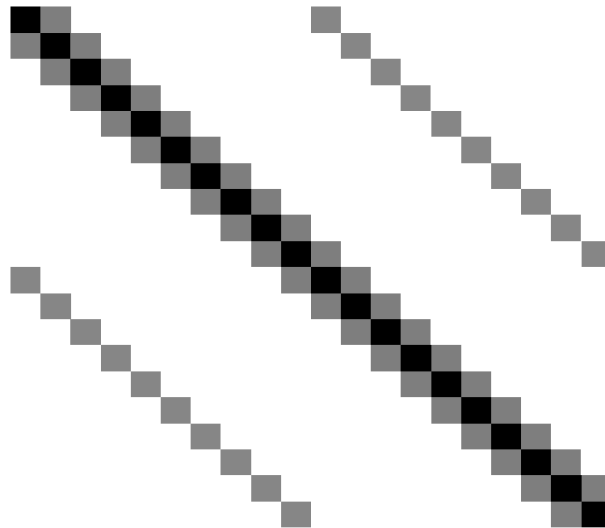


# APÊNDICE C – DEDUÇÃO DOS MÉTODOS PDMA E HDMA

## C.1 MÉTODO PDMA

O método PDMA (MORO *et al.*, 2015) efetivamente resolve sistemas de equações pentadiagonais, ou seja, que possuem apenas cinco diagonais não nulas na matriz dos coeficientes, sendo duas destas esparsas. A forma da matriz de coeficientes deste tipo de sistema de equações é mostrada na Fig. C.1.

Figura C.1 – Forma da matriz dos coeficientes de um sistema de equações pentadiagonal esparso.



Analisando a Fig. C.1, a diagonal principal da matriz dos coeficientes possui duas diagonais em banda e duas diagonais esparsas, e a distância na qual as diagonais esparsas se distanciam da diagonal principal depende do tamanho do problema.

Portanto considerando apenas as diagonais não nulas e a rosa dos ventos: a diagonal esparso superior será chamada  $n$ , a superior em banda será chamada  $e$ , a diagonal principal  $p$ , a diagonal inferior em banda  $w$  e a diagonal esparso inferior  $s$ . Este sistema de equações possui portanto uma nomeação genérica dada pela Eq. (C.1).

$$a_s X_s + a_w X_w + a_p X_p + a_e X_e + a_n X_n = b_p \quad (\text{C.1})$$

onde na Eq. (C.1) os coeficientes são dados por  $a$  e os índices dão as posições destes coeficientes conforme já citado,  $X$  é o vetor incógnita com os índices apropriados e  $b$  é o termo fonte do sistema linear.

O método PDMA baseia-se na dedução do TDMA (THOMAS, 1949) acoplada em ambas as direções. Para isto iremos realizar a dedução do TDMA nas direções  $e$  e  $w$  dados na Eq. (C.2).

$$\begin{aligned} X_p &= P_p X_e + Q_p \\ X_p &= R_p X_n + S_p \end{aligned} \quad (C.2)$$

Iremos deslocar a primeira equação da Eq. (C.2) na direção  $w$  e a segunda equação na direção  $s$ , obtendo desta forma a Eq. (C.3)

$$\begin{aligned} X_w &= P_w X_p + Q_w \\ X_s &= R_s X_p + S_s \end{aligned} \quad (C.3)$$

Basta agora substituir as incógnitas deslocadas da Eq. (C.3) na Eq. (C.1) e resolver a equação gerada para  $X_p$ . É obtido desta forma a Eq. (C.4).

$$X_p = \frac{a_s(R_s X_p + S_s) + a_w(P_w X_p + Q_w) + a_p X_p + a_e X_e + a_n X_n = b_p}{a_p + a_s R_s + a_w P_w} X_e + \frac{-a_e}{a_p + a_s R_s + a_w P_w} X_n + \frac{b_p - a_s S_s - a_w Q_w}{a_p + a_s R_s + a_w P_w} \quad (C.4)$$

Faz-se agora a soma de ambas as equações citadas na Eq. (C.2) e compara-se com a Eq. (C.4) para obter os valores de  $P_p$ ,  $R_p$  e  $Q_p + S_p$  que estão mostrados na Eq. (C.5)

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{-2a_e}{a_p + a_s R_s + a_w P_w} \\ R_p &= \frac{-2a_n}{a_p + a_s R_s + a_w P_w} \\ Q_p + S_p &= 2 \frac{b_p - a_s S_s - a_w Q_w}{a_p + a_s R_s + a_w P_w} \end{aligned} \quad (C.5)$$

Como os valores de  $Q_p$  e  $S_p$ , ao realizar este procedimento, não são conhecidos isoladamente este procedimento será iterativo, pois seus valores só poderão ser divididos ao utilizar a própria incógnita. Por este motivo foram realizadas alguns procedimentos para reduzir a memória armazenada pelo PDMA e facilitar a sua execução.

## C.2 MÉTODO PDMA - PRIMEIRA SIMPLIFICAÇÃO

É denominado a soma  $Q_p + S_p$  como um vetor isolado  $T_p$  e os valores numéricos de  $S_s$  e  $Q_w$  são obtidos novamente pela Eq. (C.3) e substituídos na Eq. (C.5), obtendo-se assim o novo vetor  $T_p$  dado pela Eq. (C.6).

$$T_p = 2 \frac{b_p - a_s(X_s - R_s X_p) - a_w(X_w - P_w X_p)}{a_p + a_s R_s + a_w P_w} \quad (C.6)$$



Desta forma a equação geral do método PDMA se torna a Eq. (C.7).

$$X_p = \frac{P_p X_e + R_p X_n + T_p}{2} \quad (C.7)$$

O algoritmo para resolver o sistema pentadiagonal de equações com o PDMA se resume portanto a:

1. Com a Eq. (C.5) obtém-se  $P_p$  e  $R_p$  para todos os nós ou volumes do domínio em ordem lexicográfica (de  $j=1, N_y$  e de  $i=1, N_x$ ), notando apenas os casos onde  $R_s$  e  $P_w$  não existem nos contornos.
2. Com a Eq. (C.6) obtém-se  $T_p$  para todos os nós ou volumes do domínio em ordem lexicográfica (de  $j=1, N_y$  e de  $i=1, N_x$ ), notando apenas os casos onde  $R_s$ ,  $P_w$ ,  $X_s$  e  $X_w$  não existem nos contornos.
3. Em ordem lexicográfica regressiva (de  $j=N_y, 1$  e de  $i=N_x, 1$ ) resolve-se o sistema linear com a Eq. (C.7)
4. Retorna-se ao passo 2) até chegar a uma determinada tolerância para  $X_p$

Nesta simplificação é necessário armazenar 3 coeficientes  $P_p$ ,  $R_p$  e  $T_p$  para resolver o sistema iterativo. De forma a minimizar a memória e tempo de CPU utilizados, foi realizada uma simplificação na qual apenas um único vetor é armazenado.

### C.3 MÉTODO PDMA - SEGUNDA SIMPLIFICAÇÃO

Para simplificar ainda mais o custo de memória e tempo de CPU utilizados pelo método PDMA foi feito o seguinte procedimento:

Em cada passo iterativo, não é necessário recalculiar os vetores  $P_p$ ,  $Q_p$  e  $T_p$ , basta apenas calcular uma única vez o divisor definido pela Eq. (C.8) e realizar um procedimento de resolução levemente modificado.

$$div_p = a_p + a_s R_s + a_w P_w \quad (C.8)$$

Analisando a Eq. (C.8) percebe-se que ainda não são conhecidos os valores de  $R_s$  e  $P_w$ , no entanto estes podem ser substituídos pelos valores presentes na Eq. (C.9).

$$\begin{aligned} R_s = R_p(s) &= \frac{-2a_n(s)}{a_p(s) + a_s(s)R_s(s) + a_w(s)P_w(s)} \\ P_w = P_p(w) &= \frac{-2a_e(w)}{a_p(w) + a_s(w)R_s(w) + a_w(w)P_w(w)} \end{aligned} \quad (C.9)$$

$$R_s = \frac{-2a_n(s)}{div_s} P_w = \frac{-2a_e(w)}{div_w}$$

Portanto o valor de  $div_p$  é dado agora pela Eq. (C.10).

$$div_p = a_p - 2\frac{a_s a_n(s)}{div_s} - 2\frac{a_w a_e(w)}{div_w} \quad (C.10)$$

Desta forma agora pode-se calcular apenas o valor de  $div_p$  dado pela Eq. (C.10) para todos os nós ou volumes do domínio. A equação geral simplificada não será mais a da Eq. (C.7), e sim uma forma iterativa da mesma, dada pela Eq. (C.11), a qual envolve algumas simplificações matemáticas.

$$X_p = X_p - \frac{a_s X_s + a_w X_w + a_p X_p + a_e X_e + a_n X_n - b_p}{div_p} \quad (C.11)$$

Agora o algoritmo da segunda versão será dado por:

1. Com a Eq. (C.10) obtêm-se  $div_p$  para todos os nós ou volumes do domínio em ordem lexicográfica (de  $j=1$ ,  $N_y$  e de  $i=1$ ,  $N_x$ ), notando apenas os casos onde  $div_s$ ,  $div_w$ ,  $a_n(s)$  e  $a_e(w)$  não existem nos contornos.
2. Com a Eq. (C.11) resolve-se  $X_p$  para todos os nós ou volumes do domínio em ordem lexicográfica regressiva (de  $j=N_y$ , 1 e de  $i=N_x$ , 1)
3. Retorna-se ao passo 2) até chegar a uma determinada tolerância para  $X_p$

Uma comparação interessante é que a Eq. (C.11) parece-se muito com a forma do método de Newton-Raphson para resolução de equações não lineares ( $X = X - \frac{f}{df}$ ), onde o valor presente no numerador da divisão da Eq. (C.11) é realmente o resíduo da equação do sistema linear o qual tende a zero quando  $X_p = X_{p,ex}$ .

## C.4 MÉTODO HDMA

O método HDMA, utilizado no trabalho de Moro e Marchi (2016), por sua vez resolve sistemas de equações heptadiagonais, os quais geralmente surgem pela discretização

de problemas 3D de volumes finitos ou diferenças finitas. Dada pela forma geral da Eq. (C.12) .

$$a_d X_d + a_s X_s + a_w X_w + a_p X_p + a_e X_e + a_n X_n + a_u X_u = b_p \quad (C.12)$$

A forma geral do método HDMA é análoga ao método PDMA, usando a dedução do TDMA na direção  $u$ . A forma geral será dada já na forma simplificada pela Eq. (C.13) e sua equação geral, também análoga ao PDMA, dada pela Eq. (C.14). O algoritmo é o mesmo do caso do PDMA, só modificando as equações para  $div_p$  e  $X_p$ .

$$div_p = a_p - 3 \frac{a_d a_u(d)}{div_d} - 3 \frac{a_s a_n(s)}{div_s} - 3 \frac{a_w a_e(w)}{div_w} \quad (C.13)$$

$$X_p = X_p - \frac{a_d X_d + a_s X_s + a_w X_w + a_p X_p + a_e X_e + a_n X_n + a_u X_u - b_p}{div_p} \quad (C.14)$$

Agora o algoritmo do HDMA será dado por:

1. Com a Eq. (C.13) obtêm-se  $div_p$  para todos os nós ou volumes do domínio em ordem lexicográfica (de  $k=1, Nz$ ;  $j=1, Ny$  e de  $i=1, Nx$ ), notando apenas os casos onde  $div_d, div_s, div_w, a_u(d), a_n(s)$  e  $a_e(w)$  não existem nos contornos.
2. Com a Eq. (C.12) resolve-se  $X_p$  para todos os nós ou volumes do domínio em ordem lexicográfica regressiva (de  $k=Nz, 1$ ; de  $j=Ny, 1$  e de  $i=Nx, 1$ )
3. Retorna-se ao passo 2) até chegar a uma determinada tolerância para  $X_p$

# APÊNDICE D – DEDUÇÃO DO COMPORTAMENTO TEÓRICO DA EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON PARA UMA APROXIMAÇÃO ISOLADA

Para conhecer-se melhor o comportamento teórico da extrapolação de Richardson, é mostrado neste apêndice a sua dedução. Ao fim desta dedução será provado que ER não efetivamente elimina o termo mais significativo do erro da aproximação utilizada, mas sim cria uma nova aproximação a qual este termo não existe.

Para aplicar ER de forma teórica basta apenas deduzir ambos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  via Eq. (2.2) e aplicá-los na Eq. (2.15). A dedução de ambas soluções numéricas está mostrada na Eq. (D.1), onde para  $\phi_1$  o tamanho de malha é  $rh$  e  $\phi_2$  o tamanho de malha é  $h$ .

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{\lambda_{p+rh} - \lambda_{p-rh}}{2rh} - \Lambda_p^{iii} \frac{(hr)^2}{6} - \Lambda_p^v \frac{(hr)^4}{120} - \Lambda_p^{vii} \frac{(hr)^6}{5040} - \Lambda_p^{ix} \frac{(hr)^8}{362880} - \Lambda_p^{xi} \frac{(hr)^{10}}{39916800} \dots \\ \phi_2 = \frac{\lambda_{p+h} - \lambda_{p-h}}{2h} - \Lambda_p^{iii} \frac{h^2}{6} - \Lambda_p^v \frac{h^4}{120} - \Lambda_p^{vii} \frac{h^6}{5040} - \Lambda_p^{ix} \frac{h^8}{362880} - \Lambda_p^{xi} \frac{h^{10}}{39916800} \dots \end{cases} \quad (D.1)$$

Agora utilizando a Eq. (2.15) e especificando para  $r = 2$  (para simplificar a equação) e  $p_0 = 2$  tem-se a Eq. (D.2):

$$K_0 = \frac{1}{h^{p_0}} \frac{\phi_2 - \phi_1}{r^2 - 1} = \frac{\lambda_{p-2h} - 2\lambda_{p-h} + 2\lambda_{p+h} - \lambda_{p+2h}}{12h^3} + \Lambda_p^{iii} \frac{1}{6} + \Lambda_p^v \frac{h^2}{24} + \Lambda_p^{vii} \frac{h^4}{240} + \Lambda_p^{ix} \frac{17h^6}{72576} + \Lambda_p^{xi} \frac{31h^8}{3628800} \dots \quad (D.2)$$

Nota-se na Eq. (D.2) que o primeiro termo do erro numérico é de ordem 2, o que significa que a ordem assintótica ( $p_0$ ) da aproximação de  $K_0$  é 2.

Agora para aplicar a extrapolação de Richardson, basta aplicar a Eq. (D.2) na Eq.  $\phi_\infty = \phi_2 + K_0 h^{p_0}$  o que nos leva a Eq. (D.3). Notando que ao fazer esta substituição é eliminado o termo da terceira derivada que correspondia ao termo de ordem 2 do erro

numérico, assim obtêm-se uma solução de ordem 4 de acurácia.

$$\phi_\infty = \phi_1 + K_0 h_1^{p_0}$$

$$\phi_\infty = \frac{\lambda_{p-2h} - 8\lambda_{p-h} + 8\lambda_{p+h} - \lambda_{p+2h}}{12h} + \Lambda_p^v \frac{h^4}{30} + \Lambda_p^{vii} \frac{h^6}{252} + \Lambda_p^{ix} \frac{h^8}{4320} + \Lambda_p^{xi} \frac{17h^{10}}{1995840} \dots \quad (D.3)$$

Analisando a Eq. (D.3) percebe-se que neste caso de  $r = 2$  esta aproximação coincide com a aproximação da primeira derivada via CDS-4.

Ao comparar o termo de ordem quatro da aproximação sem ER  $\phi_2$  na Eq. (D.1) e comparando o mesmo termo com ER  $\phi_\infty$  na Eq. (D.3) percebe-se que há um aumento na magnitude deste erro em quatro vezes, ou seja, de  $-\Lambda_p^{iii} \frac{h^4}{120}$  para  $+\Lambda_p^{iii} \frac{h^4}{30}$ . Esta comparação prova que a aproximação utilizando ER não é a mesma que antes de sua aplicação, de fato, os demais termos de  $E_h$  apresentam aumento nas suas magnitudes.